פתרון תרגיל בית 6, גאומטרי'ה אנליטית, זהבית צבי

סווגו את התבניות הבאות:

1. $x^2-2xy+y^2+x+y=0$
2. $52x^2+73y^2+72xy+120x+160y+75=0$
3. $5x^2+8xy+5y^2+x+3y=0$
4. $9x^2+24xy+16y^2+5x-15y-8=0$

פתרון

1. שלב א': המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=-1$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.

התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}=0\ \ (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבורה לכסון אורתוגונלי.

שלב ב': נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-1=1-2\lambda+\lambda^2-1=\lambda^2-2\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0\,,\,\lambda_2=2$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2=0$ ו- $\lambda_1=0\neq\lambda_2=2$, לכן זו פרבולה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1=0$:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\ \ x-y=0\Rightarrow x=y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_1\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=2$:

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix}\ \ -x-y=0\Rightarrow x=-y$$

נבחר שרירותית $y=-1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

נורמל: $\|v_2\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_2=\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

<u>שלב ג':</u> המטריצה המלכסנת היא: $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$.

<u>שלב ד':</u> נציב $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^t=\left[P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right]^t\Rightarrow\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}P^t$

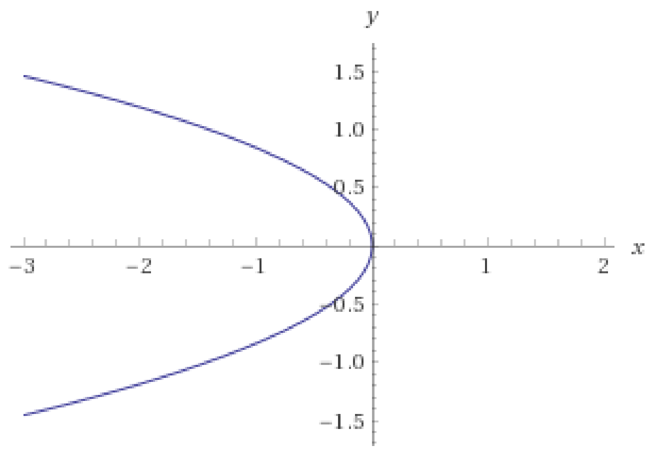
במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}=0\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}}_{D}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{P^t}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$2y'^2+\sqrt{2}x'=0\ (:2)\Rightarrow y'^2=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'$$

<u>איור לפי הצירים</u> x' ו-y':



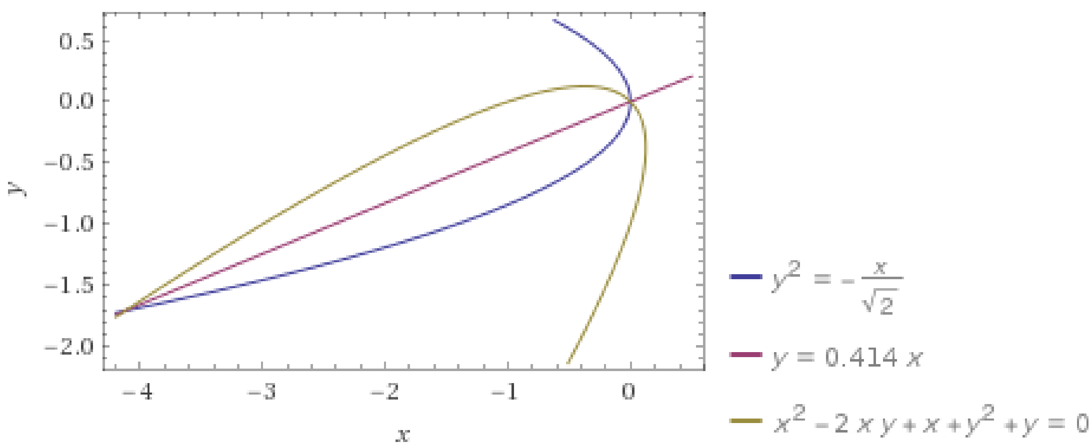
מכוון ש- $|P| = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ מדובר בפרבולה משוקפת.

מטריצת שיקוף כללית היא $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

נציב $\theta = 45^\circ$ ונקבל את $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, לכן ציר השיקוף הוא הישר $y = mx$ כאשר

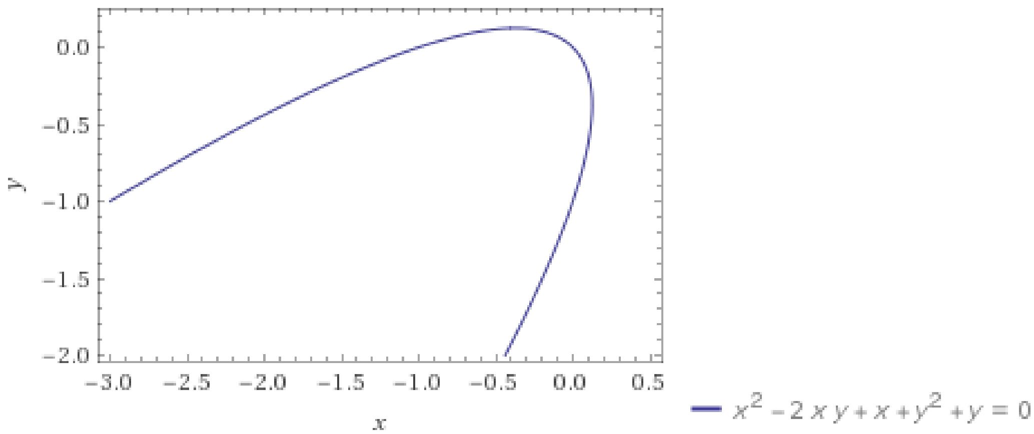
$m = \tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{45^\circ}{2} = 0.414$ כלומר $y = 0.414x$.

האיור הבא משלב את הפרבולה לפי הצירים x' ו- y', את ציר השיקוף ואת הצורה המקורית במערכת צירים x, y:



בס"ד

הצורה המקורית לפי הצירים x ו- y :



2. <u>שלב א׳ :</u> המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא : $A=\begin{pmatrix}52 & 36\\ 36 & 73\end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=36$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.

התבנית נכתבת כך :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}52 & 36\\ 36 & 73\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}120 & 160\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{X}+75=0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבודה לכסון אורתוגונלי.

<u>שלב ב׳ :</u> נמצא את הערכים העצמים ע״י פתרון המשוואה : $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}52-\lambda & 36\\ 36 & 73-\lambda\end{vmatrix}=(52-\lambda)(73-\lambda)-1296=3796-52\lambda-73\lambda+\lambda^2-1296=\lambda^2-125\lambda+2500=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=100\,,\ \lambda_2=25$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו אליפסה. הו״ע המתאימים יהיו מלכתחילה אורתוגונליים לפי משפט.

נמצא את הווקטורים העצמים ע״י פתרון המערכת : $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע״ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1=100$:

$$\begin{pmatrix}-48 & 36\\ 36 & -27\end{pmatrix}\underset{\frac{1}{9}R_2\to R_2}{\overset{-\frac{1}{12}R_1\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 4 & -3\end{pmatrix}\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ 4x-3y=0\Rightarrow x=\frac{3}{4}y$$

נבחר שרירותית $y=4$ ונקבל מיד $x=3$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_1\|=\left\|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ והווקטור המנורמל: $u_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=25$:

$$\begin{pmatrix}27&36\\36&48\end{pmatrix}\underset{\frac{1}{12}R_2\to R_2}{\overset{\frac{1}{9}R_1\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}3&4\\0&0\end{pmatrix}\quad 3x+4y=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3}y$$

נבחר שרירותית $y=-3$ ונקבל מיד $x=4$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_2\|=\left\|\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$ והווקטור המנורמל: $u_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

<u>שלב ג':</u> המטריצה המלכסנת היא: $P=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D=\begin{pmatrix}100&0\\0&25\end{pmatrix}$.

<u>שלב ד':</u> נציב $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^t=\left[P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right]^t\Rightarrow\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'&y'\end{pmatrix}P^t$

במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}52&36\\36&73\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}120&160\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+75=0\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x'&y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}100&0\\0&25\end{pmatrix}}_{D=P^tAP}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}120&160\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}200&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+75=0\Rightarrow$$

$$100x'^2+25y'^2+200x'=-75$$

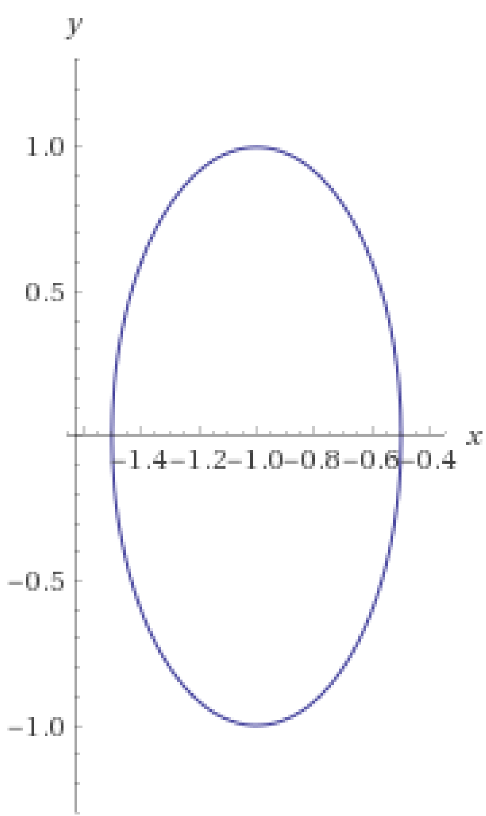
כעת נבצע השלמה לריבוע:

$$100x'^2+25y'^2+200x'=-75\Rightarrow\underbrace{\left\{\left(\underbrace{10x'}_{u}\right)^2+2\cdot\underbrace{10x'}_{u}\cdot\underbrace{10}_{v}+\underbrace{10}_{v}^2\right\}}_{(u+v)^2}-10^2+25y'^2=-75\Rightarrow$$

$$(10x'+10)^2+25y'^2=-75+100=25\Rightarrow\left(10\left(x'+1\right)\right)^2+25y'^2=25\Rightarrow100\left(x'+1\right)^2+25y'^2=25\ (:25)$$

$$\Rightarrow\frac{\left(x'+1\right)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y'^2}{1}=1$$

<u>איור לפי הצירים</u> x' ו-y' :



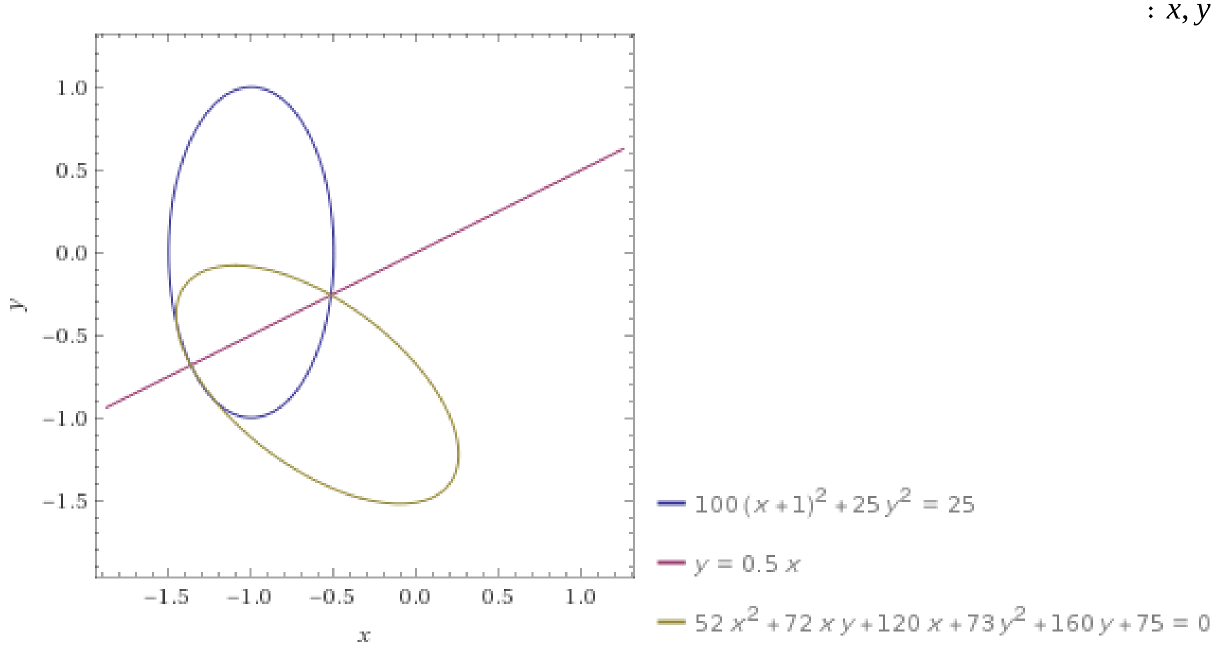
מכוון ש-$|P|=-\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-1$ מדובר באליפסה משוקפת.

מטריצת שיקוף כללית היא $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$.

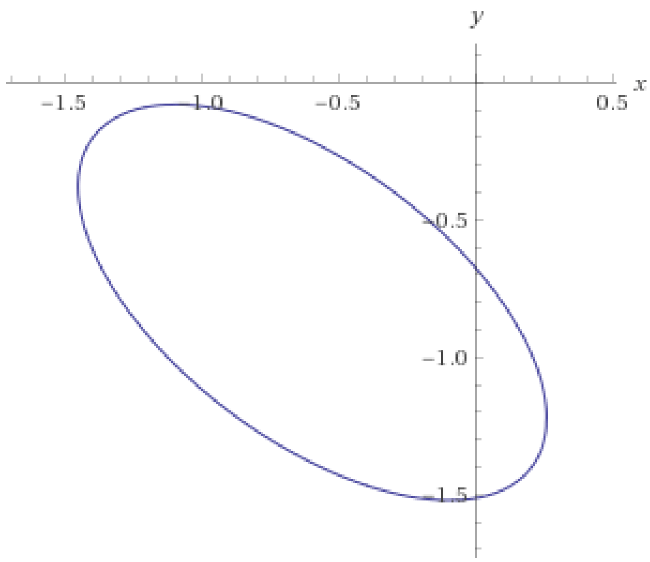
נציב $\theta = 53.13^\circ$ ונקבל את $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, לכן ציר השיקוף הוא הישר $y = mx$ כאשר

$m = \tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{53.13^\circ}{2} = 0.5$ כלומר $y = 0.5x$.

האיור הבא משלב את האליפסה לפי הצירים x' ו-y', את ציר השיקוף ואת הצורה המקורית במערכת צירים x, y :



הצורה המקורית לפי הצירים x ו-y :



3. <u>שלב א':</u> המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=4$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.

המשוואה הנתונה נכתבת כך: $(*)\ \ (x\ \ y)\underbrace{A}_{\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(1\ \ 3)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבורה לכסון אורתוגונלי.

<u>שלב ב':</u> נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}5-\lambda&4\\4&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)^2-16=25-10\lambda+\lambda^2-16=\lambda^2-10\lambda+9=0\Rightarrow\lambda_1=9\,,\lambda_2=1$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו אליפסה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1=9$:

$$\begin{pmatrix}-4&4\\4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2\to R_1}\begin{pmatrix}0&0\\4&-4\end{pmatrix}\ \ 4x-4y=0\Rightarrow x=y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_1\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=1$:

$$\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad 4x+4y=0 \Rightarrow x=-y$$

נבחר שרירותית $y=-1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_2\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

<u>שלב ג׳:</u> המטריצה המלכסנת היא: $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

<u>שלב ד׳:</u> נציב $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}^t=\left[P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\right]^t\Rightarrow\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}P^t$ בתבנית ריבועית ונקבל:

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\underbrace{P^tAP}_{D=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\underbrace{P}_{P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} & -\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=0\Rightarrow 9x'^2+y'^2+2\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'=0$$

כעת נעשה השלמות לריבוע בכדי להכניס מחוברים ממעלה ראשונה לתוך סכום (או הפרש) ריבועים בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר $(u\pm v)^2=u^2\pm 2uv+v^2$:

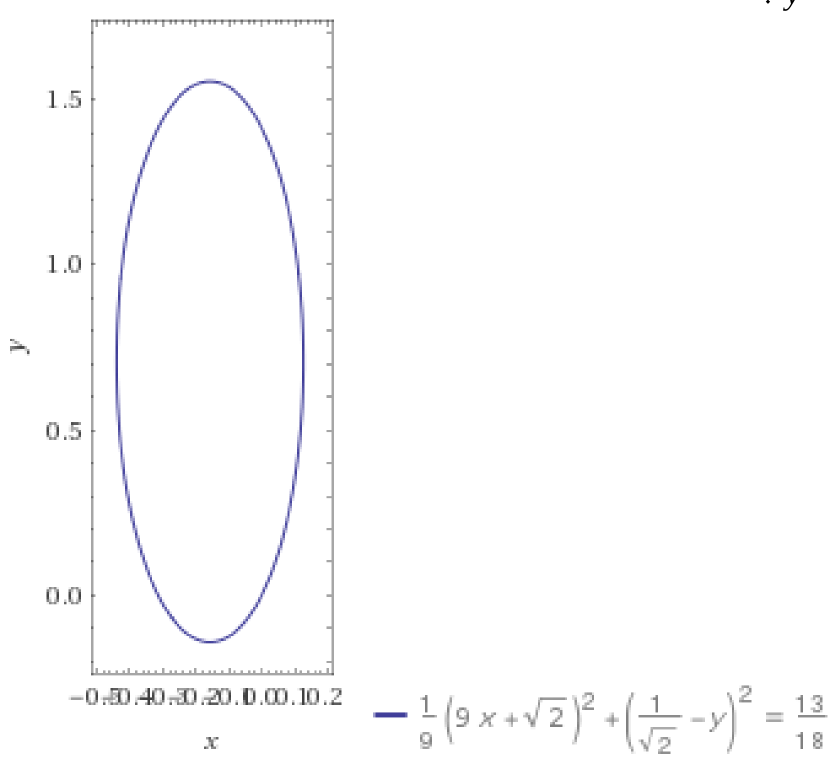
$$\left\{\underbrace{(3x')}_{u}^{2}+2\underbrace{(3x')}_{u}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}}_{v}+\underbrace{\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}}_{v}\right)^{2}}_{\frac{2}{9}}\right\}-\frac{2}{9}+\left\{\left(\underbrace{y'}_{u}\right)^{2}-2\cdot\underbrace{y'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{v}+\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{v}\right)^{2}}_{\frac{1}{2}}\right\}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow$$

$$\left(3x'+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{2}+\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}=\frac{2}{9}+\frac{1}{2}=\frac{13}{18}\Rightarrow\left(3\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{9}\right)\right)^{2}+\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}=\frac{13}{18}\Rightarrow$$

$$9\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{9}\right)^{2}+\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}=\frac{13}{18}\left(:\frac{13}{18}\right)\Rightarrow\frac{\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{9}\right)^{2}}{\frac{13}{162}}+\frac{\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}}{\frac{13}{18}}=1$$

זו אליפסה.

<u>איור לפי הצירים</u> x' ו-y' :

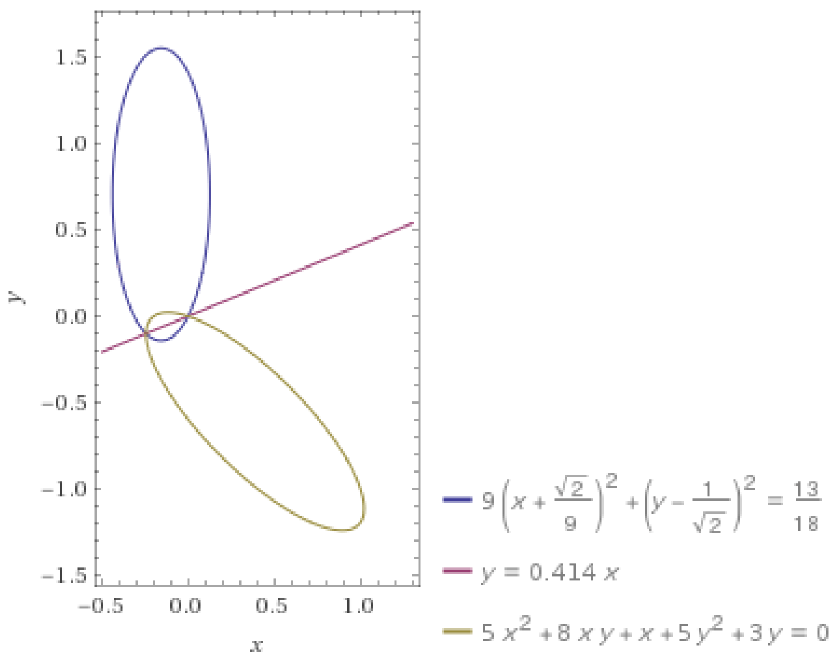


מכוון ש-$|P|=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$ מדובר באליפסה משוקפת.

מטריצת שיקוף כללית היא $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

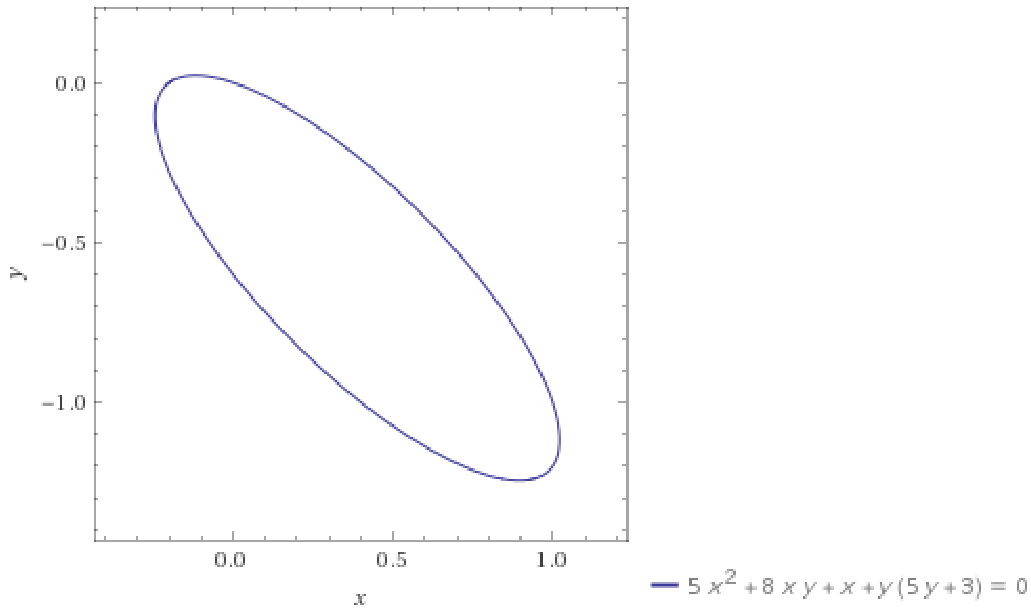
נציב $\theta = 45^\circ$ ונקבל את $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, לכן ציר השיקוף הוא הישר $y = mx$ כאשר $m = \tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{45^\circ}{2} = 0.414$ כלומר $y = 0.414x$.

האיור הבא משלב את האליפסה לפי הצירים x' ו-y', את ציר השיקוף ואת הצורה המקורית במערכת צירים x, y:



הצורה המקורית לפי הצירים x ו-y:

בס"ד



4. <u>שלב א׳:</u> המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=12$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.
התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}5 & -15\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{X}-8=0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבורה לכסון אורתוגונלי.
<u>שלב ב׳:</u> נמצא את הערכים העצמים ע״י פתרון המשוואה: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}9-\lambda & 12\\ 12 & 16-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)(16-\lambda)-144=144-9\lambda-16\lambda+\lambda^2-144=\lambda^2-25\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0\,,\,\lambda_2=25$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2=0$ ו- $\lambda_1=0\neq\lambda_2=25$, לכן זו פרבולה.
נמצא את הווקטורים העצמים ע״י פתרון המערכת: $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע״ע שמצאנו.
עבור $\lambda_1=0$:

$$\begin{pmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{pmatrix}\underset{\frac{1}{4}R_2\to R_2}{\overset{\frac{1}{3}R_1\to R_1}{\rightarrow}}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}\overset{R_2-R_1\to R_2}{\rightarrow}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad 3x+4y=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3}y$$

נבחר שרירותית $y=-3$ ונקבל מיד $x=4$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_1\| = \left\|\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$ והווקטור המנורמל: $u_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = 25$:

$$\begin{pmatrix}-16 & 12\\12 & -9\end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}R_2\to R_2}{\overset{-\frac{1}{4}R_1\to R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix}4 & -3\\4 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix}4 & -3\\0 & 0\end{pmatrix} \quad 4x-3y=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}y$$

נבחר שרירותית $y=4$ ונקבל מיד $x=3$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_2\| = \left\|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ והווקטור המנורמל: $u_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

<u>שלב ג':</u> המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 25\end{pmatrix}$.

<u>שלב ד':</u> נציב $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^t = \left[P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right]^t \Rightarrow (x \quad y) = (x' \quad y')P^t$

במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{(x \quad y)}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}9 & 12\\12 & 16\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X} + (5 \quad -15)\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X} - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$(x' \quad y')\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 25\end{pmatrix}}_{D=P^tAP}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + \underbrace{(5 \quad -15)\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}}_{P}}_{(13 \quad -9)}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$25y'^2 + 13x' - 9y' - 8 = 0$$

נבצע השלמה לריבוע:

זו פרבולה שוכבת.

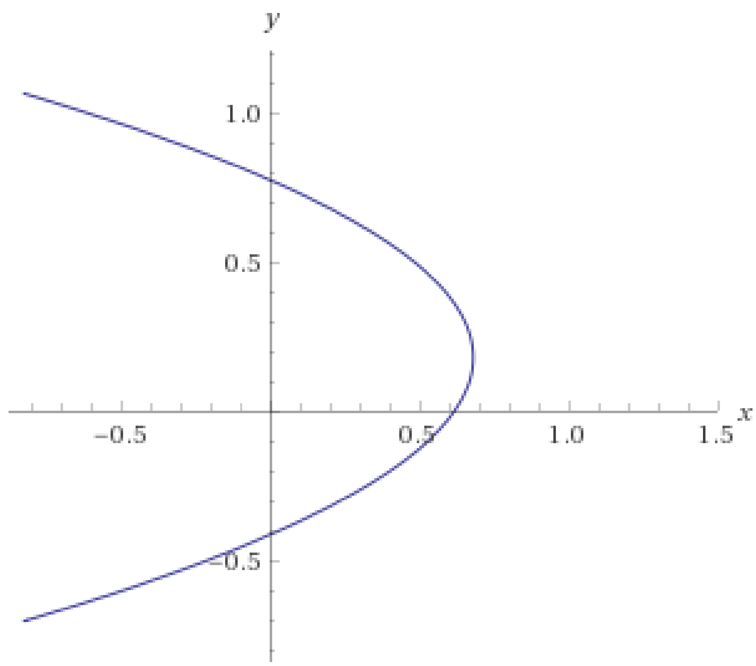
$$25y'^2+13x'-9y'-8=0\Rightarrow\left\{\left(\underbrace{5y'}_{u}\right)^2-2\cdot\underbrace{5y'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{9}{10}}_{v}+\left(\underbrace{\frac{9}{10}}_{v}\right)^2\right\}+13x'-8-\left(\underbrace{\frac{9}{10}}_{v}\right)^2=0\Rightarrow$$

$$\left(5y'-\frac{9}{10}\right)^2+13x'-\frac{881}{100}=0\Rightarrow\left(5\left(y'-\frac{9}{50}\right)\right)^2+13x'-\frac{881}{100}=0\Rightarrow25\left(y'-\frac{9}{50}\right)^2+13x'-\frac{881}{100}=0\,(:25)\Rightarrow$$

$$\left(y'-\frac{9}{50}\right)^2+\frac{13}{25}x'-\frac{881}{2500}=0\Rightarrow\left(y'-\frac{9}{50}\right)^2=\frac{881}{2500}-\frac{13}{25}x'$$

<u>איור לפי הצירים</u> x' ו-y' :

בס"ד



מכוון ש-$|P|=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=1$ מדובר בפרבולה מסובבת.

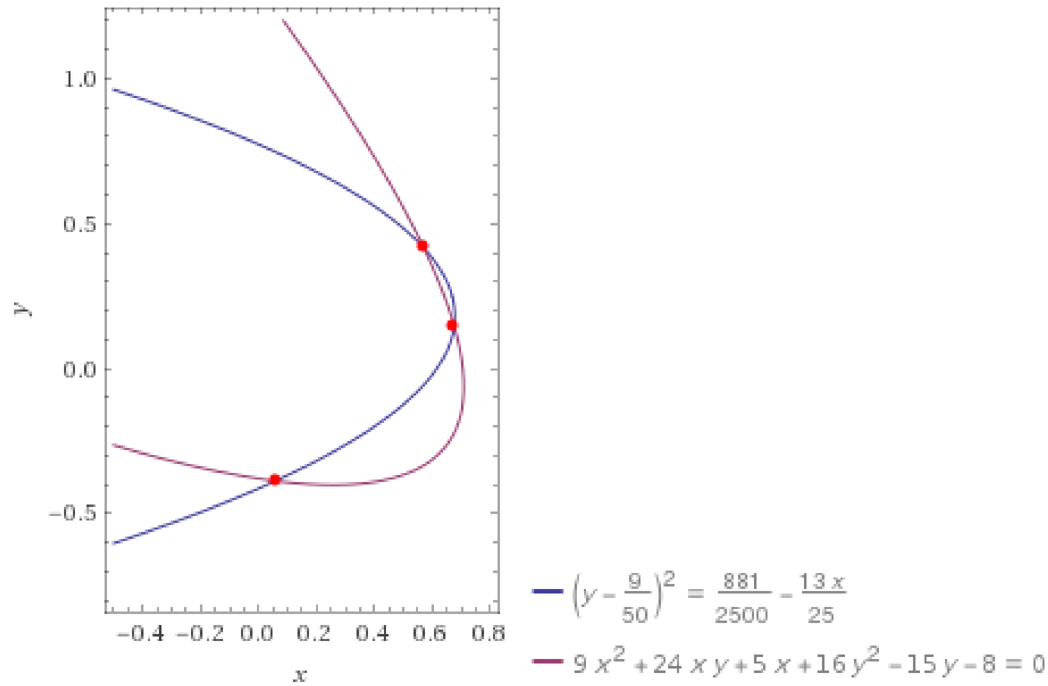
מטריצת סיבוב כללית היא $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

המטריצה $P=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ ולכן זווית הסיבוב היא

$\theta=-arccos\frac{4}{5}=-36.87^{\circ}$ עם כיוון השעון כי הזוית במינוס.

האיור הבא משלב את הפרבולה לפי הצירים x' ו-y' ואת הצורה המקורית במערכת צירים x,y :

בס"ד



הצורה המקורית לפי הצירים x ו- y :