מהמבחן https://math-wiki.com/images/a/a7/2088612TestB.pdf

2.א

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

אסימפטוטות אנכיות – אין כיוון שהפונקציה רציפה בכל הממשיים כהרכבה של רציפות.

משופעת מימין

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

לכן סה"כ יש אסימפטוטה $y=x$ מימין

משופעת משמאל

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$$

ולכן יש אסימפטוטה $y=-x$ משמאל.

הערה:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to\infty}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\neq\lim_{x\to\infty}x\cdot 1-x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\neq\lim_{x\to\infty}(1)^x$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to\infty}x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\neq\lim_{x\to\infty}x\cdot 1-x$$

5. נתון

$$a = \int_0^4 f(x)dx$$

הביעו באמצעות a את

$$\int_0^2 f(2x)dx$$

$$\int_0^2 f(2x)dx = \begin{Bmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \\ \frac{1}{2}dt = dx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt = \frac{a}{2}$$

ב. הפרכה:

$$f(x) = e^{-x}, g(x) = f(2x) = e^{-2x}$$

$$\int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$$

$$\int_0^x e^{-2t}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} < 1 - e^{-x}$$

4ב

נקרב את $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

נחשב אינטגרל $\int_0^x$

$$\ln(|1+x|) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

נציב $x = \frac{1}{2}$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}$$

גודל איברים הטור יורד לאפס, הסימנים מתחלפים ולכן מדובר בטור לייבניץ.

לכן נסכום את האיברים עד ולא כולל האיבר הראשון שגודלו קטן מגודל השגיאה.

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5}$$

מהמבחן https://math-wiki.com/images/4/44/19Infi2MorimBGTestA.pdf

4.ב חשבו את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^n}$$

זה נראה כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ כאשר הצבנו בו $x=-\frac{1}{2}$

זה דומה לטור הידוע ההנדסי:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$$

נגזור את שני הצדדים

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

נכפול את שני הצדדים בx

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

לבסוף נציב $x=-\frac{1}{2}$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^n}$$

5.א צ"ל פונקציה עולה ובוכה שאין לה אסימפטוטה ב$x=0$

$\sqrt{x}$

$\ln(x+1)$

קל להוכיח שהן מקיימות את הדרוש.

ב. הפרכה: הפונקציה

$$f(x)=x+\sqrt{x}>x$$

וכמובן מקיימת את תנאי השאלה.

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/8/87/1988612TestB.pdf

5. א. נתן דוגמא לשתי פונקציות כך שהנגזרתה של האחת תמיד קטנה מנגזרתה של השנייה, אך השנייה תמיד קטנה מהראשונה.

$$f=\frac{1}{e^x}>g=-\frac{1}{e^x}$$

אבל

$$f'=-\frac{1}{e^x}<g'=\frac{1}{e^x}$$

ב.

$$f'(x)>g'(x)$$

$$\int_0^1 f'(x)dx\geq\int_0^1 g'(x)dx$$

$$f(1)-f(0)\geq g(1)-g(0)$$

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/7/70/20Infi2MorimBGTestB.pdf

שאלה 5:

א. הפרכה: $f(x)=1$ היא כמובן מקיימת $f(0)\neq 0$

$$\int_0^x 1dx=x$$

$$\int_{-x}^0 1dx=x$$

ב. נתון שעבור הפונקציה הרציפה

$$\int_0^x f(t)dt=\int_{-x}^0 f(t)dt$$

כיוון שהפונקציה רציפה מותר לגזור לפי המשפט היסודי

$$f(x)\cdot 1-f(0)\cdot 0=f(0)\cdot 0-f(-x)\cdot(-1)$$

$$f(x)=f(-x)$$

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/1/13/20Infi2MorimBGTestA.pdf

5.א.

הפונקציה $f(x)=1$ כמובן מחזורית כיוון שהיא מקיימת

$$1=f(x+2\pi)=f(x)=1$$

אך למרות זאת

$$\int_0^{2\pi} 1dx=2\pi\neq 0$$

ב.5

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx$$

מספיק להוכיח כי

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx$$

כעת נבצע הזזה

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx = \begin{Bmatrix} t = x + 2\pi \\ dt = dx \end{Bmatrix} = \int_{\pi}^{2\pi} f(t - 2\pi)dt = \int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx$$