תרגול 6

20 בנובמבר 2013

צירופים לינארית ותלות לינארית

לדוגמא: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. אזי $\pi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-\sqrt{3}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי.

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1,v_2\dots,v_n\in V$ ו $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ אזי

1. ביטוי מהצורה $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n$ נקרא צירוף לינארי (צ"ל).
2. אם כל $\alpha_i=0$ נקבל $0v_1+0v_2+\cdots0v_n=0$. צ"ל זה נקרא טרוויאלי.
3. אם קיים צ"ל לא טריוואלי כך ש $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n=0$ אזי נאמר ש $\{v_1,v_2\dots,v_n\}$ תלויה לינארית (ת"ל). אחרת, אם הצ"ל הטריוולאי היחידי ששווה ל־0 אזי נאמר ש $\{v_1,v_2\dots,v_n\}$ בלתי תלויה לינארית (בת"ל).
   במילים אחרות $\{v_1,v_2\dots,v_n\}$ בת"ל אם $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n=0$ גורר שכל $\alpha_i=0$

דוגמאות

1. $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$בת"ל
   כי $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$
   פירושו $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$שזה גורר $\alpha_1,\alpha_2=0$.
2. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. האם $\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ בת"ל?.
   נתבונן ב $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=0$
   ונמיר אותו להצגה מטריצית $\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
   כעת השאלה שקולה האם יש פתרון לא טריאלי למערכת. נדרג ונבדוק

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נציב $z = t$ ונקבל $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון לא טרוויאלי. כלומר הוקטורים הנ"ל ת"ל.

3. יהי $0 \neq v \in V$ אזי $\{v\}$קבוצה בת"ל.

4. $\{0\}$ קבוצה ת"ל כי $1 \cdot 0 = 0$ אבל הסקלאר שונה מאפס.

5. יהי $S = \{v_1 \ldots, v_n\}$ כך ש $0_V \in S$ אזי S ת"ל.

6. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים עד דרגה 2 מעל $\mathbb{R}$.
תהא $S = \{2+6x, x^2, 1+2x+2x^2\}$.
האם $1 + x + x^2$ הוא צ"ל של איברי S?
פתרון: צריך למצוא $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
כך ש $\alpha_1(2+6x) + \alpha_2 x^2 + \alpha_3(1+2x+2x^2) = 1 + 1x + x^2$
כלומר לפי השוואת מקדמים : $2\alpha_1 + \alpha_3 = 1,\ 6\alpha_1 + 2\alpha_3 = 1,\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1$
ובצורה מטריצית $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבדוק

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

כלומר $-0.5(2+6x) + (-3)x^2 + 2(1+2x+2x^2) = 1 + 1x + x^2$.

7. יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \ldots v_n\}$ קבוצה בת"ל. הוכח $S' = \{v_1, w_2, \ldots w_n\}$ בת"ל כאשר $w_i = v_i + v_1$.
פתרון: נניח $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots \alpha_n w_n = 0$ צ"ל כל $\alpha_i = 0$.
$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots \alpha_n w_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2) + \cdots \alpha_n(v_1 + v_n)$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$$
כיוון ש $S = \{v_1, \ldots v_n\}$ בת"ל גורר ש $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = 0,\ \alpha_2 = 0 \ldots \alpha_n = 0$
$\Leftarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \ldots \alpha_n = 0 \Leftarrow S'$ בת"ל

המרחב הנפרש (span)

משפט: בסימונים לעיל $span(S) \subset V$ הינו תת מרחב שמכיל את S. והוא הכי קטן (כלומר אם $S \subset W$ אזי $span(S) \subseteq W$).

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, v_2 \dots, v_n \in V$

אזי $span(\{v_1, v_2 \dots, v_n\}) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{F}\}$

ובאופן כללי $\emptyset \neq S \subset V$ אזי $span(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{F}, v_i \in S\}$.

אוסף כל הצירופים הלינאריים של איברי S.

דוגמא $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ מהו $span(S)$?

פתרון : $span(S) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

כלומר מישור xy בתוך המרחב.

הערה: זה גם שווה ל $span(\{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\})$

דוגמא $v \in V$ אזי $span(\{v\}) = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$

תרגיל: $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

1. האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in span(S)$?

   פתרון: נבדוק האם קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

   כך ש $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

   שקול לבדוק האם למערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ קיים פתרון?

   נבדוק $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right)$

   יש פתרון למערכת לדוגמא (אם נבחר שרירותית $\alpha_3 = 0$) $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1$

   ואכן $3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. מהו $span(S)$?

   פתרון: באופן דומה נבדוק אלו וקטורים $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in span(S)$

   נדרג את המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \end{array}\right)$

   $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 0 & 1 & 4 & b-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 3a-2b \\ 0 & 1 & 4 & b-a \end{array}\right)$

   ואכן $(3a-2b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-a) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

   כלומר $span(S) = \mathbb{R}^2 = V$

   הערה: רואים בפרט $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\})$ ולכן S ת"ל.

ובנוסף, $span(S) = span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\})$.

תרגיל־הוכח:

1. $A \subseteq span(A)$
2. $W \leq V$ ת"מ אזי $span(W) = W$
3. $A \subseteq B$ אזי $span(A) \subseteq span(B)$
4. מסקנה $A \subseteq span(B)$ אזי $span(A) \subseteq span(span(B)) = span(B)$

הוכחה:

1. יהא $v \in A$ אזי v הוא גם צ"ל באיברי A ולכן שייך ל $span(A)$
2. לפי המשפט ש $span(W)$ הוא ת"מ הכי קטן שמכיל את W כיוון ש W מכיל את עצמו והוא ת"מ אזי מתקבל שיווין
3. יהא $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$ צ"ל באיברי A אזי כיוון ש $A \subseteq B$ זהו גם צ"ל באיברי B

תרגיל: $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.
$S = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ מהו $span(S)$ והאם S בת"ל ?

פתרון רוצים למצוא את כל המטריצות $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

כך ש $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

נייצג כל מטריצה באמצעות וקטור. למשל $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

כעת השאלה שקולה ל $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ולכן, כמו קודם נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 3 & 1 & d-b \\ 0 & 2 & 2 & a-b \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 & d-b-3c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-2c \end{array}\right)$$

אם נבחר $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ רואים כי חייבים לקחת $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$ ולכן S בת"ל
בנוסף רק אם $a-b-2c=0$ יש פתרון למערכת ולכן

$$span(S) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a-b-2c=0\} = \{\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix}\} =$$
$$\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= span\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

בסיס ומימד

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. קבוצה $B \subset V$ בת"ל שפורשת את המרחב ($span(B) = V$) נקראת בסיס.
הגדרה: המימד של V הוא $dim_{\mathbb{F}}V = |B|$ כאשר B בסיס. V יקרא נוצר סופית אם $dim_{\mathbb{F}}V < \infty$
משפט: ההגדרה של מימד מוגדרת היטב כלומר לכל שתי בסיסים B, B' הגדלים שלהם שווים. $|B| = |B'|$.
משפט: יהיה $B \subset V$ אזי התנאים הבאים שקולים:

1. Bבסיס
2. B קבוצה בת"ל מקסימאלית
3. B קבוצה פורשת את V- מינימאלית.

דוגמא: $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. ראינו כי $span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}) = \mathbb{R}^2$. נבדוק כי בת"ל $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ ולכן הוקטורים בת"ל. מסקנה $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ בסיס ל V.
תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$ קבוצה בת"ל
נניח שקיים $v \in V \backslash span(S)$. הוכח: $S' = \{v_1, \dots v_n, v\}$ בת"ל.
הוכחה: נניח $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n + \alpha v = 0$
$\Leftarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = -\alpha v$
$\Leftarrow \alpha = 0$ כי אחרת נקבל ש $v \in span(S)$ ע"י חילוק ב $-\alpha$.
$\Leftarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = 0 \Leftarrow \alpha_i = 0$ כי S בת"ל.
תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$. נניח v_n תלוי לינארית בוקטורים האחרים.
אזי $span(S) = spab(S')$ כאשר $S' = \{v_1, \dots v_{n-1}\}$ (בתרגיל בית)

תרגיל: יהיה $V = \mathbb{C}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. מצא $dim_{\mathbb{F}}V$

1. כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$

פתרון: קל לראות כי $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$קבוצה פורשת ובת"ל ולכן בסיס. $dim_{\mathbb{F}}V=2$

2. כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$

פתרון: במקרה זה צריך יותר וקטורים לבסיס כי יש פחות סקלארים להשתמש בהם.

טענה: $B=\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\}$ בסיס.

הוכחה: B פורשת: יהיה $\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix}\in V$ אזי

$\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$.

B בת"ל. נניח $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftarrow\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 i\\\alpha_3+\alpha_4 i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftarrow\alpha_i=0$.

דוגמאות לבסיסים סטנדרטים:

1. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. בסיס $B=\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$
2. $V=\mathbb{C}^{3\times2}$ מעל שדה $\mathbb{C}$בסיס

$$B=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$$

3. $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים מדרגה 2 מעל $\mathbb{R}$. בסיס $B=\{1,x,x^2\}$
4. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]$ בסיס $B=\{1,x,x^2,x^3,x^4\ldots\}$ בסיס אינסופי.

משפט השלישי חינם

יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ממימד n $(dim_{\mathbb{F}}V=n)$. תהא קבוצה $B\subset V$ אם Bמקיימת 2 מתוך 3 התנאים הבאים אזי היא מקיימת גם את השלישי (במקרה זה Bתהיה בסיס).

1. $\#B=n$
2. B פורשת את V
3. B בת"ל

תרגיל: $V=\mathbb{R}^{2\times2}$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. השלם את $S=\{v_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\}$ לבסיס.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V=4$ ראינו כי S בת"ל ולכן מספיק למצוא וקטור $v\notin span(S)$ ואז $S\cup\{v\}$ קבוצה בת"ל (לפי אחד התרגילים שעשינו) מגודל 4 ולכן בסיס.

ראינו כי $span(S)=\{\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix}\}$ ולכן $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\notin span(S)$.

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W\subset V$ תת מרחב מאותו מימד $(dim_{\mathbb{F}}V=dim_{\mathbb{F}}W=n)$. הוכח: $W=V$.

הוכחה: נבחר $B=\{w_1,\dots,w_n\}$ בסיס ל W. בפרט $span(B)=W$ ו Bקבוצה בת"ל. כיוון ש Bעם n איברים אזי לפי השלישי חינם $span(B)=V$.■

תרגיל: $V=\mathbb{C}_1[x]$ מעל $\mathbb{C}$. $B=\{1+x,1+ix,i+x\}$ מצא $B^{'}\subset B$ כך ש $B^{'}$בסיס ל V.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V=2$ מספיק למצוא 2 וקטורים ב B שהם בת"ל. נבדוק באופן כללי האם הווקטורים בת"ל.

ש"ל האם למערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 \end{array}\right)$יש פתרון לא טרויאלי:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 0 \\ 0 & i-1 & 1-i & 0 \end{array}\right)$, כלמור הוקטורים ת"ל אבל אם היינו מתחילים עם $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right)$ היינו מגיעים ל$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 \end{array}\right)$ כלומר $B^{'}=\{1+x,1+ix\}$ קבוצה בת"ל ולכן בסיס.

דוגמא: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $B=\{\begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix}\}$ בסיס. למה? לפי השלישי חינם מספיק למצוא 2 וקטורים בת"ל.

טענה אם $\{v_1,v_2\}$מקיימים $v_i\neq 0$ ו $v_1\neq\alpha v_2$ (כלומר v_1 אינו פרופורציונאלי ל v_2) הם בת"ל.

הערות כלליות:

1. לכל קבוצה $B\subset V$ שפורשת את Vניתן למצוא $B^{'}\subset B$ כך ש $B^{'}$ בסיס (לצמצם את B לבסיס)
2. לכל קבוצה $B\subset V$ בת"ל ניתן למצוא $B\subset B^{'}$ כך ש $B^{'}$ בסיס (להרחיב את Bלבסיס)