

# תרגיל 12

להגשה עד 20.1.16

## שאלה 1

נאמר שקבוצה  $S \subset \mathbb{R}$  היא מטיפוס  $G_\delta$  אם ניתן להציג אותה כחיתוך מני של קבוצות פתוחות. תהי  $E \subset \mathbb{R}$ . הוכיחו שקיימת קבוצה  $S \in G_\delta$  עבורה מתקיים:  $E \subseteq S$ , וכן  $m^*(S) = m^*(E)$ .

**הדרכה:** עקבו אחרי השלבים הבאים:

- השתמשו בהגדרה של  $m^*$  והוכיחו שלכל קבוצה  $E \subset \mathbb{R}$ , ולכל  $\epsilon > 0$ , קיימת קבוצה פתוחה  $O$  המקיימת
- בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

## שאלה 2

תהי  $m$  מידת לבג על הקטע  $[0, 1]$ . נניח כי לכל  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \subseteq [0, 1]$  הינה קבוצה מדידה לבג. תהי  $B$  קבוצת כל ה- $x$ ים המופיעים באינסוף קבוצות  $A_n$ . הוכיחו כי:

- $B$  מדידה לבג.
- אם  $m(B) > 0$  אזי  $m(A_n) > \delta > 0$  לכל  $n$ .
- אם  $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$  אזי  $m(B) = 0$ .
- תנו דוגמא למקרה בו  $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$  ו-  $m(B) = 0$ .

## שאלה 3

תהי  $(f_n)_{\mathbb{N}}$  סדרת פונקציות רציפות על הקטע  $[0, 1]$ . הוכיחו כי הקבוצה

$$A := \{x : f_n(x) \rightarrow 0\}$$

הינה מדידה לבג.

## שאלה 4

עבור  $x \in [0, 1]$ , נסמן  $x = 0.x_1x_2x_3 \dots$  את הפיתוח העשרוני של  $x$ . תהי  $A = \{x : x \in [0, 1] \text{ and } x_2 = 4\}$ , הוכיחו כי

$$m(A) = 0.1$$

הערה לכל מי שנכח בתרגול: צדקתם (:

**בהנאה (:**