

תרגיל 12

להגשה עד 20.1.16

שאלה 1

נאמר שקבוצה $S \subset \mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך מני של קבוצות פתוחות. תהי $E \subset \mathbb{R}$. הוכיחו שקיימת קבוצה $S \in G_\delta$ עבורה מתקיים: $E \subseteq S$, וכן $m^*(S) = m^*(E)$.

הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

1. השתמשו בהגדרה של m^* והוכיחו שלכל קבוצה $E \subset \mathbb{R}$, ולכל $\epsilon > 0$, קיימת קבוצה פתוחה O המקיימת

$$m^*(O) < m^*(E) + \epsilon$$

2. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

שאלה 2

תהי m מידת לבג על הקטע $[0, 1]$. נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq [0, 1]$ הינה קבוצה מדידה לבג. תהי B קבוצת כל ה- x ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n . הוכיחו כי:

1. B מדידה לבג.

2. אם $\delta > 0$ אזי $m(A_n) > \delta$ לכל n , אזי $m(B) > 0$.

3. אם $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אזי $m(B) = 0$.

4. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ ו- $m(B) = 0$.

שאלה 3

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות רציפות על הקטע $[0, 1]$. הוכיחו כי הקבוצה

$$A := \{x : f_n(x) \rightarrow 0\}$$

הינה מדידה לבג.

שאלה 4

עבור $x \in [0, 1)$, נסמן $x = 0.x_1x_2x_3\dots$ את הפיתוח העשרוני של x . תהי $A = \{x : x \in [0, 1) \text{ and } x_2 = 4\}$, הוכיחו כי

$$m(A) = 0.1$$

הערה (לנוכחים בתרגול היום) - צדקתם (:

בהנאה (: