חדו"א 1 תרגיל מספר 1 תשפ"א - חסמים

ענו על השאלות הבאות:

חלק א

1. תהיינה שתי תתי קבוצות של הממשיים A, B. נניח שלכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ מתקיים כי $a \le b$ (כלומר כל איברי A קטנים או שווים לכל איברי B). הוכיחו כי $\sup A \le \inf B$.
2. יהא x ממשי. נניח שלכל $\epsilon > 0$ מתקיים $0 \le x \le \epsilon$. הוכיחו כי $x = 0$.
3. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$. נניח שקיים $M > 0$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $M \le a$. הוכיחו $0 < \inf A$.
4. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$. נניח שלכל $a \in A$ מתקיים $0 < a$. הוכיחו/הפריכו: $0 < \inf A$.
5. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נסמן $B = \{-a \mid a \in A\}$. הוכיחו ש B חסומה מלרע ומתקיים $\inf B = -\sup A$
6. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת כי לכל $a \in A$ מתקיים $a > 0$ (כל איברי A חיוביים ובפרט A חסומה מלרע). נסמן $B = \left\{\frac{1}{a} \mid a \in A\right\}$.
   (א) הוכיחו כי $\inf A \neq 0$ אמ"מ B חסומה מלעיל. הוכיחו שבמקרה זה מתקיים $\sup B = \frac{1}{\inf A}$ (כלומר החסם העליון של B שווה ל $\frac{1}{\inf A}$).
   (ב) הוכיחו כי $\inf A = 0$ אמ"מ B אינה חסומה מלעיל.
7. (מאתגר) עבור x ממשי נגדיר את הערך התחתון של x להיות $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \le x\}$ כלומר המספר השלם הכי גדול שעדיין קטן שווה ל x. למשל $\lfloor 2.3 \rfloor = 2, \lfloor -3.6 \rfloor = -4$. מצאו חסם תחתון, חסם עליון, מינימום, מקסימום לקבוצה
   $$A = \left\{\sqrt{x} - \lfloor \sqrt{x} \rfloor \mid x \in \mathbb{N}\right\}$$
   (במידה וקיימים).
8. מצאו חסם תחתון, חסם עליון, מינימום, מקסימום לקבוצות הבאות במידה וקיימים:
   (א) $A = [-5, -1] \cup (2, 3)$
   (ב) $A = (-1, 1) \cup \{10\}$
   (ג) $A = \left\{(-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{8}{n} + 1\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
   (ד) $A = \left\{\frac{1}{n^2} + 4 \cdot (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
   (ה) $A = \left\{\frac{2n-3m}{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$
   (ו) $A = \left\{x^2 \mid -3 < x < 2\right\}$

(ז) $A=\{x-y \mid x,y\in[0,2)\}$

(ח) $A=\left\{q+\frac{4}{q} \mid 0<q\in\mathbb{Q}\right\}$

(ט) $A=\left\{q-\frac{5}{q} \mid 0<q\in\mathbb{Q}\right\}$

חלק ב

1. תהיינה A,B תתי קבוצות לא ריקות של $\mathbb{R}$ המקיימות ש $A\subseteq B$.

(א) במידה וקיים $\sup B$ הוכיחו שקיים $\sup A$. בנוסף קבעו מי מהבאים מתקיים והוכיחו זאת:

- $\sup A\le\sup B$
- $\sup B\le\sup B$

(ב) במידה וקיים $\inf B$ הוכיחו שקיים $\inf A$. בנוסף קבעו מי מהבאים מתקיים והוכיחו זאת:

- $\inf A\le\inf B$
- $\inf B\le\inf A$

2. תהיינה A,B תתי קבוצות לא ריקות של $\mathbb{R}$ שיש להם חסם עליון. נסמן $A+B=\{a+b \mid a\in A,b\in B\}$ קבעו מי מהבאים מתקיים והוכיחו זאת:

- תמיד $\sup(A+B)\le\sup A+\sup B$ וייתכן כי $\sup(A+B)\neq\sup A+\sup B$
- תמיד $\sup(A+B)\ge\sup A+\sup B$ וייתכן כי $\sup(A+B)\neq\sup A+\sup B$
- תמיד $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$
- אין קשר הכרחי בין $\sup(A+B)$ לבין $\sup A+\sup B$

3. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל ויהא c מספר ממשי.
קבעו מי מהבאים מתקיים והוכיחו זאת:

- תמיד $\sup\{c+a \mid a\in A\}=c+\sup A$
- תמיד $\sup\{c+a \mid a\in A\}\le c+\sup A$ וייתכן ש $\sup\{c+a \mid a\in A\}\neq c+\sup A$
- תמיד $\sup\{c+a \mid a\in A\}\ge c+\sup A$ וייתכן ש $\sup\{c+a \mid a\in A\}\neq c+\sup A$

בהצלחה! ☺