פיסיקה למתמטיקאים

אוסילטור הרמוני קלאסי

1. ראינו כי ע"פ המשפט הויריאלי

$$2\langle T\rangle = n\langle V\rangle,$$

עבור אוסילטור הרמוני ($n=2$) מתקיים $\langle T\rangle = \langle V\rangle$. כעת נראה כי תוצאה זו תקפה גם לאוסילטור הרמוני קלאסי המתואר ע"י ההמילטוניאן

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

עם מקום $x = A\sin(\omega t+\varphi)$ ותנע $p = m\omega A\cos(\omega t+\varphi)$.

נחשב את צפיפות ההסתברות $f(x)$ המוגדרת ע"י

$$Pr[x, x+dx] = f(x)dx = \frac{dt}{T/2} = \frac{dx/v}{T/2}, \tag{1}$$

כאשר $T = 2\pi/\omega$ זמן המחזור, ו $v = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t+\varphi)$ המהירות. נרשום $v = \pm A\omega\sqrt{1-(x/A)^2}$ ומהצבה ב (1) נקבל כי צפיפות ההסתברות נתונה ע"י

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}.$$

באופן דומה ניתן להראות כי צפיפות ההסתברות של התנע נתונה ע"י

$$g(p) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{m^2\omega^2A^2-p^2}}.$$

נקבל אפוא

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\int_{-A}^{A}\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{\sqrt{A^2-x^2}}dx = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

ו

$$\langle T\rangle = \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle = \frac{1}{2m}\int_{-m\omega A}^{m\omega A}\frac{1}{\pi}\frac{p^2}{\sqrt{m^2\omega^2A^2-p^2}}dp = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \langle V\rangle.$$