

שיעורי בית 8

5 בינואר 2016

1. תהא G חבורה ו $H \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית. הוכח/הפרך

(א) אם G ציקלית גם G/H ציקלית.
פתרון: יהא $g \in G$ יוצר אזי $gH \in G/H$ יוצר. הוכחה: יהא $g'H \in G/H$ לפי הגדרת g קיים n כך ש $g^n = g'$ ואז

$$(gH)^n = g^n H = g'H$$

(ב) אם G/H ציקלית גם G ציקלית.
פתרון: ניקח חבורה G שאינה חילופית (ולכן לא ציקלית). נגדיר $H = G$ תת חבורה נורמלית. אזי G/H עם איבר יחיד ולכן ציקלית אבל החבורה G אינה ציקלית.

2. נתון: $H_2 \trianglelefteq G_2$ וגם $H_1 \trianglelefteq G_1$. הוכח:

(א) $(H_1 \times H_2) \trianglelefteq (G_1 \times G_2)$
פתרון: יהא $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ ו $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$. צריך להוכיח כי

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} \in H_1 \times H_2$$

אכן, לפי הגדרת חבורת המכפלה $G_1 \times G_2$

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1})$$

כיון ש H_1 נורמלית נקבל כי $g_1 h_1 g_1^{-1} \in H_1$ ובגלל ש H_2 נורמלית נקבל כי $g_2 h_2 g_2^{-1} \in H_2$

$$(g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1}) \in H_1 \times H_2$$

(ב) $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$
פתרון: נגדיר את הומומורפיזם ההטלה

$$\phi : G_1 \times G_2 \rightarrow (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$$

ע"י

$$(g_1, g_2) \mapsto (g_1 H_1, g_2 H_2)$$

זהו הומו' על (בדקו!) נרצה להשתמש במשפט האיזו' הראשון. קודם נחשב את הגרעין של ϕ

$$\begin{aligned} \ker \phi &= \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : \phi((g_1, g_2)) = 0\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : (g_1 H_1, g_2 H_2) = 0\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : g_1 \in H_1, g_2 \in H_2\} = H_1 \times H_2 \end{aligned}$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

3. תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות $N \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי

$$\forall x \in N, y \in K : xy = yx$$

[הדרכה: התבוננו ב $x^{-1}y^{-1}xy$]

פתרון: יהא $x \in N, y \in K$. מהגדרת N חבורה נורמלית נקבל כי

$$y^{-1}xy \in N$$

ומסגירות בחבורה נקבל כי גם

$$x^{-1}y^{-1}xy \in N$$

באופן דומה, מנורמליות של K נקבל כי

$$x^{-1}y^{-1}x \in K$$

ועם סגירות

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K \cap N = \{e\}$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy = e$$

שזה אומר

$$xy = yx$$

4. תהא G חבורה ו $N \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית המקיימת $|G/N| = p$ כאשר p מספר ראשוני.

(א) הוכיחו לכל $g \in G - N$ מתקיים כי g, g^2, \dots, g^p נציגים של מחלקות שונות ב G/N (ולכן $G/N = \{g^i N : 1 \leq i \leq p\}$)
פתרון: כיוון ש N נורמלית G/N חבורה. כעת יהא $g \in G - N$ אזי $gH \in G/N$ שונה מהאיבר הנטרלי. נסתכל על תת החבורה הנוצרת על ידו ולכן גם היא שווה ל $\langle gH \rangle \leq G/N$. גודל תת חבורה זאת צריכה לחלק את סדר החבורה $p =$ ולכן גם היא שווה ל p (כי p ראשוני ו $|\langle gH \rangle| > 1$). לכן בקבוצה $\{g^i H : i \in \mathbb{N}\} = \langle gH \rangle$ יש p איברים שונים שהם $\{g^i H : i = 1, \dots, p\}$ בפרט g, g^2, \dots, g^p נציגים של מחלקות שונות

(ב) הוכיחו כי אם בנוסף $N \subseteq Z(G)$ (כלומר N מוכלת במרכז של G) אזי G חבורה חילופית (או מילים אחרות $Z(G) = G$).
פתרון: יהא $a, b \in G$. מסעיף קודם נבחר $g \in G - N$ ונקבל כי

$$G = \bigcup_{i=1}^p g^i H$$

כי G היא איחוד כל הקוסטים. אזי קיימים i, j כך ש $a \in g^i N, b \in g^j N$ ואז קיימים $n_1, n_2 \in N$ כך ש

$$a = g^i n_1, b = g^j n_2$$

כיוון שנתון $N \subseteq Z(G)$ בפרט n_1, n_2 מתחלפים עם כל איבר אחר ב G ואז

$$ab = g^i n_1 g^j n_2 = g^i g^j n_1 n_2 = g^j g^i n_1 n_2 = g^j n_2 g^i n_1 = ba$$

5. תהא G חבורה חילופית. נגדיר $D = \{(g, g) : g \in G\} \subseteq G \times G$. הוכיחו כי זהו תת חבורה נומאלית של $G \times G$ והראו כי

$$G \times G / D \cong G$$

פתרון: טענה D היא תת חבורה. הוכחה $(e, e) \in D$ לפי הגדרה ולכן הנטרלי שייך ל D . אם $(g_1, g_1), (g_2, g_2) \in D$ אזי גם הכפל שלהם $(g_1 g_2, g_1 g_2) \in D$. אם $(g, g) \in D$ אזי גם ההפוכי שלו $(g^{-1}, g^{-1}) \in D$. ולכן D תת חבורה.

טענה: היא גם נורמאלית. הוכחה: בחבורה חילופית, כל תת חבורה היא נורמלית.

כעת נגדיר

$$\phi : G \times G \rightarrow G$$

ע"י

$$(x, y) \rightarrow xy^{-1}$$

טענה זהו אפימורפיזם. הוכחה:

$$\phi((x, y)(z, w)) = \phi((xz, yw)) = xz(yw)^{-1} = xzw^{-1}y^{-1} = xy^{-1}zw^{-1} = \phi((x, y))\phi((z, w))$$

בנוסף לכל $g \in G$ ניקח את (g, e) כמקור. כעת נחשב את הגרעין

$$\ker \phi = \{(x, y) \in G \times G : \phi(x, y) = e\} = \{(x, y) \in G \times G : xy^{-1} = e\} = \{(x, y) \in G \times G : x = y\} = D$$

לפי משפט האיז' הראשון נקבל את המבוקש.

6. תהא G_1, G_2 שתי חבורות עם סדרים זרים (כלומר $\gcd(|G_1|, |G_2|) = 1$). הוכיחו

כי קיים הומו' אחד $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ [רמז: חישבו על התמונה $\phi(G_1)$]
פתרון: יהא $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ הומו'. אזי התמונה $H = \text{Im}(\phi) \leq G_2$ היא תת חבורה של G_2 ולכן $\frac{|G_2|}{|H|} \in \mathbb{Z}$ לפי משפט לגרנז'. מצד שני לפי משפט האיז' מתקיים כי

$$G_1/\ker \phi \cong H = \text{Im}(\phi)$$

אזי

$$\frac{|G_2|}{|\ker \phi|} = |H|$$

ואז

$$\frac{|G_2|}{|H|} = |\ker \phi| \in \mathbb{Z}$$

כלומר $|H|$ מחלק גם את $|G_1|$ וגם את $|G_2|$. כיוון שאלו מספרים זרים נקבל כי $|H| = 1$ ולכן $H = \{e_{G_2}\}$. אם התמונה של ההומו' זה רק האיבר הנטרלי של G_2 אזי מדובר בהומו' הטריאלי (ששולח כל איבר ב G_1 לנטרלי של G_2).

7. נגדיר $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ מעגל היחידה עם פעולת כפל. הוכיחו כי

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong G \quad (\text{א}) \quad \text{הדרכה: השתמשו בפונקציה } [e^{2\pi xi}]$$

פתרון: נגדיר את הפונקציה

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$$

ע"י

$$x \mapsto e^{2\pi xi}$$

נראה כי זהו אפימורפיזם: אכן

$$\phi(x_1 + x_2) = e^{2\pi i(x_1+x_2)} = e^{2\pi i x_1} e^{2\pi i x_2} = \phi(x_1)\phi(x_2)$$

והיא על כי לכל $z \in G$ קיימת לו הצגה פולארית. כלומר $z = e^{2\pi xi}$ עבור $0 \leq x < 2\pi$ והוא יהיה מקור אפשרי אחד.

לפי משפט האיז' נקבל כי

$$\mathbb{R}/\ker \phi \cong G$$

נותר להראות כי $\ker \phi = \mathbb{Z}$. אכן

$$\ker \phi = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : e^{2\pi xi} = e^{2\pi 0i}\} = \mathbb{Z}$$

כי

$$e^{2\pi x_1 i} = e^{2\pi x_2 i} \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$$

[זכרו: הפונקציה $e^{2\pi xi}$ מחזורית 2π]

(ב) נגדיר $H \leq G$ להיות כל שורשי היחידה מסדר כלשהו. כלומר

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

כאשר $U_n = \{z \in G : z^n = 1\}$ הם שורשי היחידה מסדר n . בעזרת סעיף קודם, הראו כי H איזומורפית ל \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
פתרון: הפונקציה

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow G$$

המוגדרת ע"י

$$x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi xi}$$

היא איזומורפיזם לפי סעיף קודם ובפרט חח"ע. אם נצמצם אותה לקבוצה \mathbb{Q}/\mathbb{Z} אזי נקבל מונומורפיזם

$$\phi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow G$$

המוגדר ע"י

$$x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi xi}$$

כיוון ש

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \text{Img}(\phi) \leq G$$

נותר לחשב את $\text{Img}(\phi)$:

$$\text{Img}(\phi) = \{\phi(x + \mathbb{Z}) : x + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\} = \{\phi(x + \mathbb{Z}) : x \in \mathbb{Q}\} = \{e^{2\pi xi} : x \in \mathbb{Q}\} = \{e^{2\pi \frac{a}{b} i} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$$

$$H' = \{e^{2\pi \frac{a}{b} i} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\} = H$$

טענה: $H' = H$ הוכחה: (\subseteq) אם נעלה את $e^{2\pi \frac{a}{b} i} \in H'$ בחזקת b נקבל $e^{2\pi ai} = 1$ ולכן $e^{2\pi \frac{a}{b} i} \in U_b \subset H$

(\supseteq) יהא $z \in H$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $z \in U_n$. נרשום $z = e^{2\pi xi}$ ההצגה הפולארית שלו אזי $1 = z^n = e^{2\pi nxi}$ כלומר $nx \in \mathbb{Z}$ מאותו נימוק מסעיף קודם. ומכאן ש $x \in \mathbb{Q}$ ולכן $z = e^{2\pi xi} \in H'$