

תרגיל בית 3

1. בטופולוגיה, קבוצה A תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י איברים מ A . במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות. הראו כי קבוצת קנטור C הינה מושלמת.

פתרון: ראינו כי $x \in C$ אמ"מ ניתן לייצג אותו באופן הבא

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad a_n \in \{0, 2\}$$

ניקח את הסדרה הבאה:

$$x_1 = 0.3a_1$$

$$x_2 = 0.3a_1a_2$$

⋮

$$x_k = 0.3a_1a_2 \dots a_k$$

⋮

כאשר $0.3\dots$ מסמל ייצוג טרינארי. ברור מהבנייה כי $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ומכאן של C אין נקודות מבודדות ו C קבוצה מושלמת.

2. נניח כי m הינה מידת לבג ו $A \subseteq \mathbb{R}$ הינה קבוצה מדידה בורל כך ש $m(A) > 0$. הוכיחו כי אם

$$B = \{x - y : x, y \in A\}$$

אזי B מכילה קטע פתוח לא ריק סביב 0.

הדרכה:

i. הניחו ללא הגבלת הכלליות כי $0 < m(A) < \infty$. מצאו קבוצה פתוחה G כך ש $G \supseteq A$ וגם

$$m(A \cap I) > \frac{3}{4}m(I) \quad \text{כך ש} \quad m(A) > \frac{3}{4}m(G)$$

ii. הראו כי אם $\delta = \frac{1}{2}m(I)$ נובע כי לכל $x \in (-\delta, \delta)$ הקטע $I \cup \{x + I\}$ מכיל את

$$A \cap I \cup \{x + A \cap I\}$$

הסיקו בעזרת הסעיף הקודם כי

$$A \cap I \cap \{x + A \cap I\} \neq \emptyset$$

iii. הסיקו כי $x \in B$.

פתרון:

i. נניח כי $0 < m(A) < \infty$ אחרת נחתוך את A עם $[-n, n]$ עבור n גדול מספיק על מנת לקבל את הדרוש. ראינו כבר כי ניתן להתקרב לקבוצה מדידה עם קבוצה פתוחה שמכילה אותה ולכן בהכרח קיימת G כך ש $m(A) > \frac{3}{4}m(G)$. מכיוון ש G הינה איחוד זר של קטעים פתוחים זרים נובע כי קיים אינטרוול I כך ש $m(A \cap I) > \frac{3}{4}m(I)$.

ii. אם $\delta = \frac{1}{2}m(I)$ נובע כי לכל $x \in (-\delta, \delta)$ הקטע $I \cup \{x+I\}$ מכיל את $m(A \cap I) > \frac{3}{4}m(I)$ מכיוון ש $\frac{3}{2}m(I)$, ואורכו קטן מ $A \cap I \cup \{x + A \cap I\}$ והמידה של $A \cap I$ שווה לזאת של $\{x + A \cap I\}$, הן אינן יכולות להיות זרות אחרת נקבל כי $m(A \cap I \cup \{x + A \cap I\}) > \frac{3}{2}m(I)$ בסתירה למה שהראינו. אם $A \cap I$ ו $\{x + A \cap I\}$ אינן זרות אזי נובע כי $x \in B$. iii.

3. נניח כי A הינה מדידה לבג ב \mathbb{R} ו

$$B = \bigcup_{x \in A} [x-1, x+1]$$

הוכיחו כי B הינה מדידה לבג.

הדרכה:

- i. הסתכלו על $\bigcup_{x \in A} (x-1, x+1)$ והסיקו כי זוהי קבוצה מדידה.
ii. בטאו את $B / \bigcup_{x \in A} (x-1, x+1)$ בעזרת הקבוצה A והסיקו כי גם היא מדידה.

פתרון:

- i. $\bigcup_{x \in A} (x-1, x+1)$ הינה קבוצה מדידה שכן היא פתוחה.
ii. $B / \bigcup_{x \in A} (x-1, x+1) = A-1 \cup A+1$ ולכן מדידה. נובע כי B מדידה.