תרגיל בית 3 -פתרון

1. בטופולוגיה, קבוצה A תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י איברים מ A. במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות. הראו כי קבוצת קנטור C הינה מושלמת.

פתרון: ראינו כי $x \in C$ אמ"מ ניתן לייצג אותו באופן הבא

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \qquad a_n \in \{0,2\}$$

אם הסדרה $\{a_k\}$ אינה מתאפסת מ $k \in \mathbb{N}$ מסוים ניקח את הסדרה הבאה:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0._3 a_1 \\ x_2 &= 0._3 a_1 a_2 \\ &\vdots \\ x_k &= 0._3 a_1 a_2 \ldots a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

כאשר $0._3\ldots$ מסמל ייצוג טרינארי. ברור מהבנייה כי $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ומכאן של C אין נקודות מבודדות ו C קבוצה מושלמת. אם הסדרה $\{a_k\}$ מתאפסת החל מ $N \in \mathbb{N}$ מסוים, נתקרב עם הסדרה $x + \frac{2}{3^{N+k}}$.

2. נניח כי m הינה מידת לבג ו $A \subseteq \mathbb{R}$ הינה קבוצה מדידה בורל כך ש $m(A) > 0$. הוכיחו כי אם

$$B = \{x - y : x, y \in A\}$$

אזי B מכילה קטע פתוח לא ריק סביב 0.

פתרון: נניח כי A חסומה אחרת נחתוך אותה עם $(-n,n)$ עבור n גדול מספיק. עכשיו, נניח בשלילה כי B לא מכילה קטע פתוח סביב 0. אזי נובע כי קיימת סדרה של מספרים $\{c_n\} \in B$ כך ש $c_n \to 0$ וגם $\sum c_n < \infty$. מכאן שאוסף הקבוצות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = A + c_n$ הינו זר, ומשום ש A חסומה(נניח ע"י M) נובע כי $A' = \bigcup A_n$ חסומה (נניח ע"י $M \sum c_n$) ומכאן ש $m(A') < \infty$. מצד שני נובע מהאי אינוורינטיות של הזזות של מידת לבג כי $m(A') = \sum m(A_n) = \infty$. מכאן סתירה.

3. נניח כי A הינה מדידה לבג ב $\mathbb{R}$ ו

$$B=\bigcup_{x\in A}[x-1,x+1]$$

הוכיחו כי B הינה מדידה לבג.

פתרון: נסתכל על $A_i=\bigcup_{\substack{i-1<x<i+1\\ x\in A}}[x-1,x+1]$ עבור $i\in\mathbb{Z}$. ברור כי כל A_i הינו קשיר ב $\mathbb{R}$ ולכן קטע.

כמו כן $\bigcup_i A_i=B$ ולכן B מדידה.

4. שאלת בונוס(קשה): תהי m מידת לבג. בנו תת קבוצת בורל A של $\mathbb{R}$ כך ש

$$0<m\left(A\cap I\right)<m\left(I\right)$$

לכל אינטרוול פתוח I .