תרגיל 10 מבוא לתורת החבורות

שאלה 9.1 תהי G חבורה ותהי $N \lhd G$ תת חבורה נורמלית. נתון כי $G/N \simeq S_3$. ציירו את דיאגרמת תתי החבורות בין G ל N. עבור כל חבורה H ציינו:

1. האם H נורמלית?
2. מהו $[G:H]$?
3. מהו $[H:N]$?

שאלה 9.2 ניתן כאן כמה סימונים לחבורות: נסמן ב U_n את החבורה של כל המטריצות המשולשיות עליונות והפיכות.
N_1 תהיה תת החבורה של מטריצות $\{A \in U_n \mid |A| = 1\}$.
N_2 תהיה תת החבורה של מטריצות שכל האלכסון שלהם הוא 1.
D_n תהיה תת החבורה של המטריצות האלכסוניות.
נסתכל גם על החבורה $D_n \cap N_1$ של מטריצות אלכסוניות עם דטרמיננטה 1.
(מומלץ לצייר את הדיאגרמה כמו שעשינו בכיתה)

1. קבעו עבור כל אחת מתתי החבורות האם היא נורמלית ב U_n (והוכיחו)
2. הראו כי $D_n \cap N_1$ נורמלית ב D_n.
3. הוכיחו כי

$$D_n/D_n \cap N_1 \simeq (U_n/N_2)/(N_1/N_2)$$

שאלה 9.3 נגדיר חבורה שנקראת חבורת הקוואטרניונים ומסומנת Q_8. זאת חבורה מסדר 8 שהאיברים שלה הם:

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

הכפל מוגדר לפי

$$i^2 = j^2 = k^2 == -1$$

$$\begin{aligned} i \cdot j &= k \\ j \cdot i &= -k \\ i \cdot k &= -j \\ k \cdot i &= j \\ j \cdot k &= i \\ k \cdot j &= -i \end{aligned}$$

הכפל עם מינוס מתנהג כמו שמצפים. (יש טבלת כפל מלאה בוויקיפדיה בערך "חבורת הקוואטרניונים" אם מישהו צריך).

1. ציירו את דיאגרמת Hasseשל תתי חבורות. בכל תת חבורה ציינו איזה איברים נמצאים בה.
2. קבעו עבור כל תת חבורה אם היא נורמלית ב Q_8.
3. תהי N תת חבורה נורמלית מסדר 2 של Q_8 (כפי שמצאתם בסעיפים הקודמים, יש רק אחת כזאת). חבורת המנה Q_8/N היא חבורה מסדר 4 ולכן איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ או ל $\mathbb{Z}_4$. לאיזה מהם? כתבו איזומורפיזם מפורש, כלומר כתבו עבור כל קוסט לאן הוא נשלח.

שאלה 9.4 יהיו $H, N \leq G$ תתי חבורות כך ש N נורמלית. הוכיחו כי

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

הערה: הטענה הזאת נכונה גם בלי ההנחה של נורמליות אבל ההוכחה קצת יותר קשה.