תרגיל 10 בפונקציות מרוכבות

1. בשאלה זו אנחנו נגיד ש z_0 הוא אפס מסדר 0 אם $f(z_0) \neq 0$ כמו כן, נתייחס לסינגולריות סליקה כאל קוטב מסדר 0. יהי z_0 אפס מסדר m של $f(z)$ ואפס מסדר r של $g(z)$. (f, g אנליטיות בסביבת z_0).

   (א) הוכיחו כי z_0 הוא אפס מסדר $m+r$ של $f(z)g(z)$

   (ב) אם $m > r$ הוכיחו כי z_0 הוא אפס מסדר $m-r$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$.

   (ג) אם $m \geq r$ הוכיחו כי z_0 הוא קוטב מסדר $r-m$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$.

2. מצאו את האפסים של הפונקציות הבאות ומצאו את הסדר שלהם.

   (א) $(e^z - 1)\sin z \cos z$.

   (ב)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^{z^2}-1}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

   (הוכיחו גם שהפונקציה אנליטית ב $z_0 = 0$)

3. מצאו את כל הפונקציות האנליטיות ב $\{z \mid |z| < 2\}$ המקיימות ש $f(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

4. האם קיימת פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)| = |1 - |z||$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

5. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של z_0. בנוסף נתון כי ב z_0 יש ל f קוטב מסדר 2 ל g יש אפס מסדר 3, ל $r(z)$ אפס מסדר 2 ול $h(z)$ אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות ב z_0 של:

   (א) $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$

   (ב) $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$

6. תהיינה f, g שתי פונקציות שלמות המקיימות כי $|f(z)| \leq |g(z)|$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכיחו כי

$$f(z) = cg(z)$$

   כאשר c קבוע המקיים $|c| \leq 1$.
   הדרכה: הגדירו כמובן

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

   איזה סוג סינגולריות יכול להיות ל $h(z)$? מדוע?