

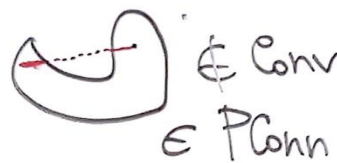
**תזכורת:** תת קבוצה  $X$  במ"נ  $(E, \|\cdot\|)$  נקראת **קבוצה קמורה** ( $convex$ ) אם לכל  $x, y \in X$  מתקיים  $\{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq X$  (מסילה לינארית).

סימון:  $X \in Conv$

**הערה:**  $\varphi$  רציפה כי  $\varphi \in Lip_{\|y-x\|}$

**טענה:**  $Conv \subset PConn$

$$Conv \subsetneq PConn \subsetneq Conn$$



דוגמה:

**הגדרה:**  $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$  קטע אם לכל  $a, b \in X$  מתקיים  $[a, b] \subseteq X$ .

**טענה:** נניח  $X \subset \mathbb{R}$  תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1)  $X$  "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

(2)  $X \in Conv$

(3)  $X \in PConn$

(4)  $X \in Conn$

**הסבר:** (1)  $\Leftrightarrow$  (2): לכל  $a, b \in X$  מתקיים  $[a, b] \subseteq X$ . מצד שני

$$[a, b] = \{a + (b-a)t \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

(2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4) נובע מהכלות ברורות  $Conv \subseteq PConn \subseteq Conn$ .

(4)  $\Rightarrow$  (1)

אם נניח שלא, אז  $X$  לא קטע, כלומר קיימים  $a, b \in X$  כך ש  $[a, b] \not\subseteq X$ . ז"א קיימים

$$a < c < b \text{ אבל } c \notin X$$

$$X_1 := (-\infty, c) \cap X, X_2 := (c, \infty) \cap X$$

ואז נקבל ש  $X = \underbrace{X_1}_{a \in} \cup \underbrace{X_2}_{b \in}$  פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש -  $X \notin Conn$  בסתירה!



**משפט (ערך הביניים):** נניח  $X$  מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

$$(1) X \in Conn$$

(2) לכל פונקציה רציפה  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  יש תכונת ערך ביניים.

**הוכחה:**

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

תמונה רציפה שומרת על  $Conn$ . לכן  $Conn \ni f(X) \subset \mathbb{R}$  ואז מהטענה הקודמת נקבל ש -  $f(X) \ni \{קטעים\}$ , ואז  $f(X)$  בעל תכונת ערך הביניים.

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

נניח בשלילה שלא. אז  $X \notin Conn$ . ז"א קיים פירוק טופולוגי  $X = X_1 \cup X_2$

נגדיר פונקציה  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , אשר שולחת את  $X_1$  ל - 0 ואת  $X_2$  שולחת ל - 1.

$X_1, X_2$  פתוחות ב -  $X \Leftarrow$  קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז  $f$  רציפה. אבל נקבל ש -  $f(X) = \{0,1\}$ .

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!



**דוגמאות של קבוצות קמורות:**

$$(1) \text{ כל מ"נ } (E, \|\cdot\|)$$

$$(2) \text{ כדורים } B_r(a), B_r[a] \subset E \text{ בתוך מ"נ.}$$

$$(3) \text{ מלבנים, תיבות, אליפסואידים, ...}$$

**משפט (האלומות - תנאי מספיק לקשירות):** נניח  $X$  מ"ט,  $X = \bigcup_{j \in J} Y_j$  כך ש:

$$(1) \forall j \in J: Y_j \in Conn$$

$$(2) \bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$$

אזי  $X \in Conn$ .



**הוכחה:** מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת  $z \in \bigcap_{j \in J} Y_j$ .

– נניח בשלילה ש  $X$  פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות  $X_1, X_2$  כך ש –

$$X = X_1 \cup X_2$$

בה"כ  $z \in X_1$  (ואז  $z \notin X_2$ ).

$$\forall j \in J: Y_j = (Y_j \cap X_1) \cup (Y_j \cap X_2) \quad \text{– מתקיים}$$

כעת נשים לב ש  $Y_j \cap X_1$  ו  $Y_j \cap X_2$  פתוחות וזרות בתת מרחב  $Y_j$  ו  $z \in Y_j \cap X_1$ .

אז  $Y_j \cap X_2 = \emptyset$  לכל  $j$ , אחרת היינו מקבלים ש  $Y_j \notin Conn$  (פריק).

$$\text{כעת – } X_2 = \bigcup_{j \in J} (X_2 \cap Y_j) = \emptyset \quad \text{בסתירה לפירוק של } X.$$

☺

### תוצאות:

(1) נניח  $X = Y_1 \cup Y_2$ , כאשר  $Y_1, Y_2 \in Conn$ ,  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ . אזי  $X \in Conn$

(פשוט המשפט כאשר יש 2 אינדקסים).

(2) שרשור



נניח  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k$ , כאשר  $Y_k \in Conn$  לכל  $k \in \mathbb{N}$  וכן –

$$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$$

אזי  $X \in Conn$ .

**הסבר:** (1) מידי מהמשפט!

(2) נובע מ- (1) ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$$\forall k \in \mathbb{N}: A_k := Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_k \in Conn$$

נשים לב –  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

וברור –  $A_1 \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in Conn$

☺

**הערה (מרכיבי קשירות):** במ"ט  $X$  נגדיר את היחס הבא –

$x \equiv y \stackrel{def}{=} x$  אם "אפשר לחבר  $x$  ל-  $y$  ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת –

$$Conn \ni A_{x,y} \subset X$$

כך ש –  $\{x, y\} \subset A$



**טענה:** היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

**הסבר:**

$$A_{x,x} = \{x\}, x \equiv x \quad (1)$$

$$A_{y,x} := A_{x,y}, x \equiv y \Rightarrow y \equiv x \quad (2)$$

$$x \equiv z \Leftarrow \begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \text{ - "צ"ל} \quad (3)$$

$$A_{x,z} := A_{x,y} \cup A_{y,z}$$

ואכן  $y \in A_{x,y}$  וגם  $y \in A_{y,z}$  ואז מתוצאה 1 (שירשור) נקבל ש-  $A_{x,z} \in Conn$ .

**הגדרה:** מרכיב קשירות של נק  $x$  ב  $X$  הוא  $[x] := \{y \in X | x \equiv y\}$  "מחלקה של  $x$ ".

$$X = \bigcup_{x \in X} [x] \quad \text{- נשים לב כי}$$

**תכונות:**

- $X = \bigcup_{x \in X} [x]$  (יש חזרות!  $[x] = [y]$   $\Leftrightarrow x \equiv y$ ).
- מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.

**תרגיל:** הוכיחו ש  $T$  לא הומיאומורפי ל  $L$  (sans serif font).

הסבר: במרחב  $T$  יש נקודה  $z$  כך שלתת מרחב  $T \setminus \{z\}$  יש 3 מרכיבי קשירות.

אבל לכל  $a \in L$  לתת מרחב  $L \setminus \{a\}$  יש לכל היותר 2 מרכיבי קשירות.

- $X$  קשיר  $\Leftrightarrow$  יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

רמז: משפט האלומות.

- $[x] \in Conn$
- $[x] = \bigcup \{A \subseteq X | x \in A, A \in Conn\}$

ז"א  $[x] =$  תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את  $x$ .

- $[x]$  סגור ב-  $X$ .

רמז: תוכיחו קודם את התרגיל הבא (ואז תשתמשו בתכונה הקודמת):

**תרגיל:** נניח  $\bar{Y} = X$  (ז"א  $Y$  צפופה ב-  $X$ ). אם  $Y \in Conn$  אז גם  $X \in Conn$ .

**דוגמה:** תארו מרכיבי קשירות של:

$$X = (0,2) \cup (2,5) \cup \{7\} . \text{א.}$$

תשובה:  $[1] = (0,2), [3] = (2,5), [7] = \{7\}$

$$X = \{1,2,3,4\} \times \mathbb{R} . \text{ב.}$$

תשובה:  $\{1\} \times \mathbb{R}, \{2\} \times \mathbb{R}, \{3\} \times \mathbb{R}, \{4\} \times \mathbb{R}$ .

**הגדרה:** מ"ט  $X$  נקרא "לא קשיר להלוטין" (*totally disconnected*) אם

$[x] = \{x\}$  לכל  $x \in X$  (רק נקודות תת קבוצה קשירה).

**דוגמאות:**

(1) מרחבים דיסקרטיים.

$$\mathbb{Q} \quad (2)$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (3)$$

$$(\mathbb{Z}, d_p) \quad * \quad (4)$$

(רמז: לכל  $a \in (\mathbb{Z}, d_p)$  ו  $b \neq a$  קיימת סביבה סגורה  $U \in N(a)$  כך ש  $b \notin U$ )

(5)  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  \* (Sorgenfrey Line) כאשר בקבוצה  $\mathbb{R}$  מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s := \{O \subseteq \mathbb{R} : x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 [x, x + \varepsilon) \subseteq O\}$$

**הגדרה:** (מרכיב קשירות מסילתי): לכל מ"ט  $X$  ונקודה  $x \in X$  מרכיב קשירות  $[x]_p$

של  $x$  מוגדר כמחלקת שקילות של  $x$  לגבי יחס שקילות הבא:

$$y \sim_p x \stackrel{def}{=} x \equiv_p y$$

**טענה:**  $\equiv_p$  יחס שקילות.

**הסבר:**

(1) צ"ל  $x \equiv_p x$ . ניקח מסילה קבועה.

(2) צ"ל  $x \equiv_p y \Leftrightarrow y \equiv_p x$ . עבור מסילה  $f: [0,1] \rightarrow X$

נגדיר "מסילה הפוכה" -  $f^*: [0,1] \rightarrow X \quad f^*(t) = f(1-t)$

$$x \equiv_P z \Leftarrow \begin{cases} x \equiv_P y \\ y \equiv_P z \end{cases} \quad \text{צ"ל - (3)}$$

$$\begin{cases} f_1(0) = x, f_1(1) = y \\ f_2(0) = y, f_2(1) = z \end{cases} \quad \text{עבור -}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} f_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{נגדיר } f_3: [0,1] \rightarrow X \text{ כך ש -}$$

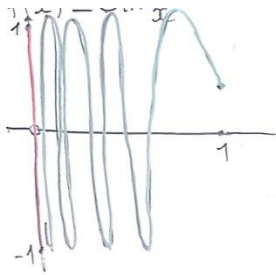
$$f_3(0) = x, f_3(1) = z$$

ונקבל ש -  $f_3$  רציפה מהתרגיל הבא:

**תרגיל:** נניח  $X = Y_1 \cup Y_2$ , סגורות  $Y_1, Y_2$ .

נתונה פונקציה  $f: X \rightarrow Z$  כך ש  $f|_{Y_1}: Y_1 \rightarrow Z, f|_{Y_2}: Y_2 \rightarrow Z$  רציפות.

אז  $f$  רציפה (\* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).



**הערה:**  $PConn \neq Conn$

נגדיר פונקציה  $f: (0,1] \rightarrow [-1,1]$   $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

נגדיר -  $X := (\{0\} \times [-1,1]) \cup Gr(f)$

$$(0,1] \simeq Gr(f) := \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \right\}$$

כעת,  $(0,1] \simeq Gr(f)$  קשיר ו -  $Gr(f)$  צפוף ב -  $X$  (כלומר  $\overline{Gr(f)} = X$ ), לכן לפי התרגיל הנ"ל  $X \in Conn$ . ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן  $X$  לא קשיר מסילתית, כלומר  $X \notin PConn$ .

**תרגיל:** (לעתיד) לכל פונקציה רציפה  $f: X \rightarrow Y$  מתקיים ש

$$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}}_{\text{ת מרחב טופולוגי}} \subset X \times Y$$

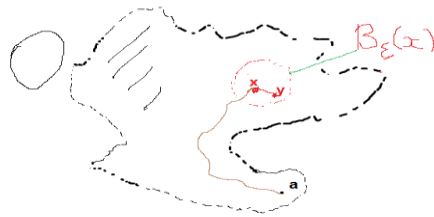
בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

**תרגיל:** כל קבוצה קשירה ופתוחה  $O$  במרחב נורמי  $E$  הוא קשיר מסילתית.

**הסבר:** נבחר  $a \in O$  ונסמן  $a \in A := [a]_p$  מרכיב קשירות מסילתית של  $a$  במרחב  $O$ .

אז  $A$  פתוחה. כי אם  $x \in A$  אז  $B_\varepsilon(x) \subseteq O$  עבור  $\varepsilon$  מספיק קטן.  $B_\varepsilon(x)$  קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב  $B_\varepsilon(x)$  מ  $x$  לכל  $y \in B_\varepsilon(x)$ . אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב  $O$  מנקודה  $a$  ל  $y$  (טרנזיטיביות). לכן  $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ .

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים  $O \setminus A$  פתוח. אבל אז  $O \setminus A$  קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש  $O$  פריק. לכן  $O = A = [a]_p$  ואז  $O$  קשיר מסילתית (מרכיב 1).



---

**הגדרה:**  $X$  נקרא קשיר מקומית בנקודה  $a \in X$  אם לכל סביבה  $U \in N(a)$  קיימת סביבה  $U \supseteq V \in N(a)$  כך ש  $V$  קשיר. אומרים: קשיר מקומית אם זה מתקיים בכל נקודה.

**תרגיל:**

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. \*\* תנו דוגמה של תת מרחב ב  $\mathbb{R}^2$  שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

**קישורים מומלצים:**

<https://en.wikipedia.org/wiki/Homeomorphism>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic\\_projection](https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Connected\\_space](https://en.wikipedia.org/wiki/Connected_space)

## בסיס לטופולוגיה

נגדיר סימונים חדשים. נניח  $\gamma \subseteq P(X)$  (אוסף תת קבוצות ב  $X$ ). נגדיר:

- $\gamma^\cup := \{\cup\{B: B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma\}$  (כל מיני איחודים דרך איברים של  $\gamma$ )
  - $\gamma^{\cap F} := \{\cap\{B: B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma, \beta \text{ is finite}\}$  (חיתוכים סופיים דרך איברים של  $\gamma$ )
- תמיד:  $\emptyset \in \gamma^{\cap F}$   $\emptyset \in \gamma^\cup$   $\gamma \subseteq \gamma^\cup$   $\gamma \subseteq \gamma^{\cap F}$   
למשל אקסיומות טופולוגיה אפשר לכתוב כך:  
 $(t_1) \emptyset, X \in \tau$   $(t_2) \tau^{\cap F} = \tau$   $(t_3) \tau^\cup = \tau$ .

הגדרה: (בסיס  $basis$ ) יהי  $(X, \tau)$  מ"ט.  $\gamma \subseteq \tau$  נקרא **בסיס** (לטופולוגיה  $\tau$ ) אם כל

קבוצה פתוחה (לא ריקה) שווה לאיחוד איברים מ  $\gamma$ .

הערה: (הגדרה שקולה) התנאים הבאים שקולים:

1.  $\gamma$  בסיס לטופולוגיה  $\tau$ .
2.  $\gamma^\cup = \tau$ .
3.  $\gamma \subseteq \tau$  ולכל  $O \in \tau$  ולכל  $a \in O$  קיים  $G_a \in \gamma$  כך ש  $a \in G_a \subseteq O$ .

הגדרה: אומרים ש  $(X, \tau)$  - בעל תכונת מנייה שנייה ( $second\ countable$ ) ונסמן:

$$(X, \tau) \in B_2$$

אם קיים בסיס  $\gamma$  בן מנייה.

דוגמאות: (תשתמשו בהגדרה (3))

- ב  $X = \mathbb{R}$   $\gamma_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$  וגם  $\gamma_2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  בסיסים.
- ב  $X = \mathbb{R}^2$
- א.  $\gamma_0 = \{\text{עיגולים פתוחים}\}$
- ב.  $\gamma_1 = \{(a, b) \times (c, d)\} = \{\text{מלבנים פתוחים}\}$
- ג.  $\gamma_2 = \{\text{ריבועים פתוחים}\}$   $\gamma_3 = \{\text{משולשים פתוחים}\}$
- ד.  $\gamma_4 = \{\text{עיגולים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות"}\}$
- $\mathbb{R}^n \in B_2$



{כדורים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות" ורדיוסים  $\gamma_4 = \{\frac{1}{k}\}$  בן מניה !

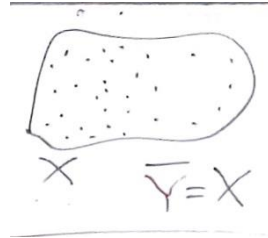
• לכל  $(X, d)$  "כדורים פתוחים" בסיס לטופולוגיית  $top(d)$ .

א.  $\gamma := \{B_r(a)\}_{a \in X, r > 0}$   $\gamma^\cup = top(d)$  (ראו משפט: "כדורים בסיס").

ב. גם  $\gamma_1 := \{B_{\frac{1}{n}}(a)\}_{a \in X, n \in \mathbb{N}}$  מהווה בסיס.

טענה: לכל  $(X, d)$  ולכל  $\bar{Y} = X$  (כלומר  $Y$  צפוף ב  $X$ )  $\gamma_2 := \{B_{\frac{1}{n}}(a)\}_{a \in Y, n \in \mathbb{N}}$  מהווה

בסיס ל  $top(d)$ .



תוצאה חשובה: אם מרחב מטרי  $(X, d)$  הוא ספרבילי אז הוא גם  $B_2$ .

$$(X, d) \in B_2 \Leftrightarrow (X, d) \in Sep$$

טענה: הוכיחו ש  $B_2$  תכונה תורשתית.

רמז: תבדקו שאם  $\gamma$  בסיס ל  $(X, \tau)$  ו  $Z \subseteq X$  תת קבוצה אז  $\gamma_Z := \{G \cap Z \mid G \in \gamma\}$  בסיס לתת מרחב  $(Z, \tau_Z)$ .

טענה: לכל מרחב דיסקרטי  $(X, \tau_{discr})$  אוסף כל הנקודונים  $\gamma_0 = \{\{x\} \mid x \in X\}$  הוא בסיס ל  $(X, \tau_{discr})$ . לכל בסיס אחר  $\gamma$  מתקיים  $\gamma_0 \subseteq \gamma$ .

הסיקו:  $(X, \tau_{discr}) \in B_2 \Leftrightarrow |X| \leq \aleph_0$ .

למשל:  $(\mathbb{R}, \tau_{discr}) \notin B_2$

משפט:  $B_2 \subset Sep$ .

הוכחה: נניח  $\gamma$  בסיס בן מנייה במ"ט  $(X, \tau)$ . צריך למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

בה"כ  $\emptyset \notin \gamma$ . לכל  $G \in \gamma$  נבחר נקודה אחת בלבד  $y_G \in G$ . נגדיר  $Y_\gamma := \{y_G \mid G \in \gamma\}$  אז  $Y_\gamma$  בת מניה (כי  $\gamma$  ב"מ) ו  $Y_\gamma$  צפופה ב  $X$ . אכן נוכיח  $cl(Y_\gamma) = X$ .

לכל  $O \in \tau$  ולכל  $a \in O$  קיים  $G_a \in \gamma$  כך ש  $a \in G_a \subseteq O$ . לפי הבנייה קיים  $y_G \in G_a$  לכן  $y_G \in Y_\gamma \cap O \neq \emptyset$ .

זה מוכיח שכל נקודה  $a \in X$  שייכת לסגור של  $Y_\gamma$ . ז"א  $cl(Y_\gamma) = X$ .



תוצאה:  $Metriz \cap B_2 = Metriz \cap Sep$

תוצאה: במרחבים מטריזביליים – ספרביליות כן תורשתית.

דוגמה:  $B_2 \neq Sep$ .

הסבר: נוכיח בהמשך שקו סורגנפראי מקיים:  $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$ ,  $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$ .

טענה: נניח  $X$  קבוצה ו  $\gamma$  אוסף תת קבוצות ב  $X$ . התנאים הבאים שקולים:

1.  $\gamma$  בסיס לטופולוגיה מסוימת.

2. א.  $X \in \gamma$

ב. חיתוך של 2 קבוצות מ  $\gamma$  אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ  $\gamma$ .

הערה: ב שקול ל \* :  $\forall A, B \in \gamma \forall x \in A \cap B \exists C \in \gamma \quad x \in C \subseteq A \cap B$

ב\* שקול ל \*\* :  $\gamma^{\cap F} \subseteq \gamma^{\cup}$ .

הוכחה: נגדיר אוסף  $\tau := \gamma^{\cup}$ . מ"ל  $\gamma$  טופולוגיה.

$\emptyset, X \in \tau$  (t<sub>1</sub>)

הסבר:  $X \in \tau$ . בגלל תנאי א. תנאי  $\emptyset \in \tau$  נובע מהתכונה הנ"ל על  $\gamma^{\cup}$ .

$\tau^{\cap F} = \tau$  (t<sub>2</sub>)

הסבר:  $\tau^{\cap F} = (\gamma^{\cup})^{\cap F} = (\gamma^{\cap F})^{\cup} \subseteq (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \gamma$

$$\tau^{\cup} = \tau \quad (t_3)$$

הסבר:  $\tau^{\cup} = (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \gamma$



## בסיס מקומי

**הגדרה:** (בסיס מקומי)  $\alpha \subseteq N(a)$  נקרא **בסיס מקומי** לנקודה  $a$ , אם לכל  $U \in N(a)$  קיים  $V \in \alpha$  כך ש  $V \subseteq U$ .

**הגדרה:** אומרים ש-  $(X, \tau)$  בעל תכונת מנייה ראשונה, ונסמן:  $(X, \tau) \in B_1$  אם לכל נקודה  $a \in X$  קיים בסיס מקומי בן מנייה.

**דוגמה:** לכל  $(X, d)$  – דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה  $a$  –

$$\alpha_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$$

$$\alpha_2 := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(a) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{בן מנייה !}$$

**תוצאה:**  $Metriz \subset B_1$

**דוגמה:**  $(X, \tau_{disc}) \in B_1$ .

הסבר: לכל  $a \in (X, \tau)$  היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון  $\alpha := \{a\}$  הוא בסיס מקומי.

**תרגיל:**  $B_1$  תכומה תורשתית.

**טענה:**  $B_2 \subset B_1$

הסבר: נניח  $\gamma$  בסיס בן מנייה במ"ט  $(X, \tau)$ . לכל  $a \in X$  נגדיר  $\gamma_a := \{A \in \gamma \mid a \in A\}$ .

אז  $\gamma_a$  בסיס מקומי בנקודה  $a$ .

דוגמה:  $B_2 \neq B_1$ .

$$\begin{cases} (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \in B_1 \\ (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \notin B_2 \end{cases}$$

הערה:  $Discrete \subset Metrizable \subset B_1$

$$Metrizable \cap Sep \subset B_2 \subset B_1$$

הגדרה:  $\dim(X) = 0 \stackrel{def}{=} \text{קיים בסיס } \gamma \text{ לטופולוגיה כך שלכל } A \in \gamma \text{ קבוצה סגורה.}$

דוגמאות:

א.  $\dim(X, \tau_{discr}) = 0$

ב.  $\dim(\mathbb{Q}) = 0$

$\gamma := \{(a, b) \cap \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  בסיס שמורכב מקבוצות סגורות.

$(a, b) \cap \mathbb{Q}$  קבוצה סגורה ב- $\mathbb{Q}$ .

ג. הוכיחו:  $\dim(\mathbb{Z}, d_p) = 0$ .

ד. Sorgenfrey line  $\dim(\mathbb{R}, \tau_s) = 0$

תזכורת:  $O \in \tau_s \stackrel{def}{=} x \in O \Rightarrow \exists \epsilon = \epsilon_x > 0: [x, x + \epsilon_x) \subset O$

תכונות קו סורגנפריי:

•  $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_2$

• א.  $\tau \neq \tau_s$  ב.  $\tau \subset \tau_s$

הסבר: א.  $[0, 1) \in \tau_s$ ,  $[0, 1) \notin \tau$

ב. מ"ל שבסיס של טופולוגיה טבעית  $\tau$  מוכל ב- $\tau_s$ .

$$(a, b) = \cup \{ [x, x + \epsilon_x) \mid [x, x + \epsilon_x) \subset (a, b) \} \in \tau_s$$

•  $\dim(\mathbb{R}, \tau_s) = 0$

הסבר:  $\gamma := \{ [a, b) : a < b \} \subset \tau_s$  בסיס שמורכב מקבוצות סגורות.

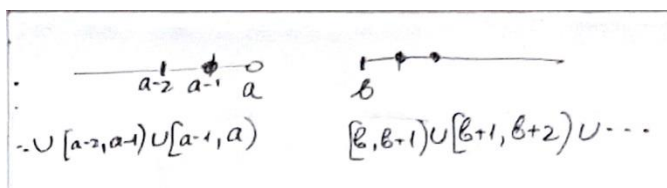
$$O = \cup_{x \in O} [x, x + \epsilon_x)$$

• טענת עזר: כל  $[a, b)$  סגורה –

א)  $[a, b) \in \tau_s$  ברור (כלומר פתוחה לפי ההגדרה).

$x \in [x, x + \epsilon_x)$

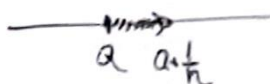
(ב)  $[a, b]$  גם סגורה כי  $(-\infty, a) \cup [b, \infty) = \mathbb{R} \setminus [a, b]$  פתוחה.



•  $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$

הסבר: רציונליים  $\mathbb{Q}$  קבוצה צפופה גם בטופולוגיה  $\tau_s$  כי  $[a, b] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

•  $(\mathbb{R}, \tau_s) \in B_1$



הסבר:

$$\alpha := \left\{ U_n := \left[ a, a + \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset N_{\tau_s}(a)$$

בסיס מקומי בן מנייה לנק'  $a \in \mathbb{R}$ .

• טענה:  $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים בסיס  $\gamma \supset \tau_s$  כך ש  $\gamma$  בן מנייה.

$[x, x+1) \in \tau_s$  פתוחה, לכן הוא שווה לאיחוד איברים מבסיס  $\gamma$ .

אז קיים  $A_x \in \gamma$  כך ש  $x \in A_x \subset [x, x+1)$ .

נבחר  $A_x$  כזה ונגדיר העתקה  $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \gamma \quad x \mapsto A_x$

$\varphi$  חז"ע"  $(x \neq y \Rightarrow A_x \neq A_y)$ .

$$2^{\aleph_0} = \aleph = |\mathbb{R}| = |\varphi(\mathbb{R})| \leq |\gamma|$$

מכאן  $|\gamma| \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ , לכן  $\gamma$  לא בת מנייה!

•  $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_{3\frac{1}{2}}$

הסבר: נובע מהטענה הבאה:

טענה: אם  $X \in T_2$  וגם  $\dim(X) = 0$  אז  $X \in T_{3\frac{1}{2}}$ .

רמז: אם  $O \subset X$  קב' סגורה אזי -

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \notin O \end{cases}, f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

רציפה! (4 מקרים .... ראינו הוכחה דומה)

•  $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin \text{Metriz}$ .

הסבר:  $\text{Metriz} \cap \text{Sep} \subset B_2$  אבל  $(\mathbb{R}, \tau_s) \in \text{Sep}$   $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$ .

תרגיל: הוכיחו שאם  $\dim X = 0, X \in T_2$  אז  $X$  לא קשיר לחלוטין.

קשר בין עקרון Heine ותכונת  $B_1$

הגדרה: אומרים שמ"ט הוא בעל **תכונת FU** (Frechet – Urysohn) אם:

$$\forall A \subseteq X: scl(A) = cl(A)$$

הערה:  $\text{Metriz} \subset B_1 \subset FU$

הערה: למדנו דוגמה של מ"ט שהוא לא  $FU$ .

טענה:  $B_1 \subseteq FU$

הוכחה מקוצרת: שימו לב שאם  $X \in B_1$  אז לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מנייה

$\alpha = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  מונוטוני (ז"א  $U_{n+1} \subseteq U_n$ ). ואז ההמשך דומה למקרה של מ"מ

משפט (עיקרון **Heine** מתוקן): נניח  $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$  פו' בין מ"ט. נניח ש -  $(X, \tau) \in FU$ , אין הגבלה על  $Y$ . אז התנאים הבאים שקולים:

(א) רציפה.

(ב) שומרת על התכנסות.

הוכחה:

(1)  $\Leftarrow$  (2): תמיד (ממשפט  $\frac{1}{2}$  היינה).

(2)  $\Leftarrow$  (1): מ"ל (קריטריון (5) במשפט הנ"ל על רציפות) -

$$\forall A \subseteq X: \boxed{f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))}$$

נתון  $(X, \tau) \in FU$  - ז"א -  $scl(A) = cl(A)$

לכן שקול להוכיח -  $f(scl(A)) \subseteq cl(f(A))$

נתון (2) אומר ש -  $f$  שומרת על ההתכנסות. ז"א -  $x_n \xrightarrow{\tau} z \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(z)$

ובפרט עבור סדרות מ –  $a_n \in A$ :

$$a_n \xrightarrow{\tau} z \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow{\sigma} f(z)$$

$$z \in scl(A) \Rightarrow f(z) \in scl(f(A))$$

לכן קיבלנו –  $f(scl(A)) \subseteq scl(f(A))$

$$f(cl(A)) \underset{X \in FU}{\overset{=}{\subseteq}} f(scl(A)) \underset{\text{הראנו}}{\subseteq} scl(f(A)) \underset{\text{תמיד מתקיים}}{\subseteq} cl(f(A)) \quad \text{ואז:}$$



**תוצאה:** עיקרון *Heine* תמיד נכון למשל עבור קו *Sorgenfrey* –  $(\mathbb{R}, \tau_s) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$  כי  $(\mathbb{R}, \tau_s) \in B_1 \subset FU$ .

**הערה:** בטופולוגיה, באנליזה ... יש צורך אמיתי ב"סדרות מוכללות":

$(M, \leq)$  קבוצה סדורה חלקית מכוונת (לכל  $\forall a, b \in M \exists c \in M a \leq c, b \leq c$ ).

דוגמה חשובה: כל בסיס מקומי דוגמה לקבוצה סדורה מכוונת.

סדרה מוכללת או רשת (*generalized sequences or net*) היא פונקציה

$$((\mathbb{N}, \leq) \xrightarrow{f} X \text{ (סדרה רגילה): } (M, \leq) \xrightarrow{f} X$$

• דרך רשתות אפשר לתת תיאור של  $cl(A)$ .

$$z \in cl(A) \Leftrightarrow z \text{ גבול של סדרה מוכללת}$$

ואז יש הכללת עיקרון *Heine* ...

שימו לב: למשל אינטגרלים זה סוג של גבול דרך רשתות מסוימות.

ספר מומלץ: ד. ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה.