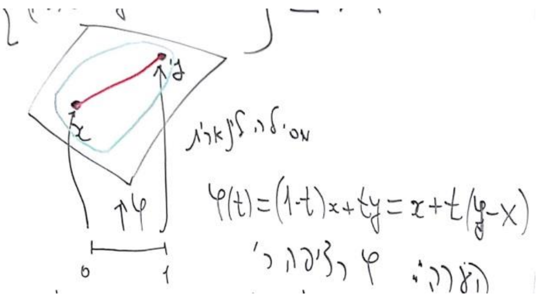


<u>תזכורת</u>: תת קבוצה X במ"נ $(E,\|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** $(convex)$ אם לכל $x,y\in X$ מתקיים $\{(1-t)x+ty : 0\le t\le 1\}\subseteq X$ (מסילה לינארית).

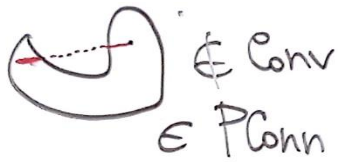
סימון: $X\in Conv$

הערה: φ רציפה כי – $\varphi\in Lip_{\|y-x\|}$.

טענה: $Conv\subset PConn$.

$$\boxed{Conv\subsetneq PConn\subsetneq Conn}$$

דוגמה:



הגדרה: $\mathbb{R}\supseteq X\neq\varnothing$ **קטע** אם לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$.

<u>טענה</u>: נניח $X\subset\mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) X "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

2) $X\in Conv$

3) $X\in PConn$

4) $X\in Conn$

הסבר: $(1)\Leftarrow(2)$: לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$. מצד שני $[a,b]=\{a+(b-a)t\mid 0\le t\le 1\}$.

$(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)$ נובע מהכלות ברורות $Conv\subseteq PConn\subseteq Conn$.

$(4)\Rightarrow(1)$

אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a,b\in X$ כך ש $[a,b]\not\subset X$. ז"א קיימים $a<c<b$ כך ש $a,b\in X$ אבל $c\notin X$.

נגדיר $X_1:=(-\infty,c)\cap X, X_2:=(c,\infty)\cap X$

ואז נקבל ש $X=\underbrace{X_1}_{a\in}\sqcup\underbrace{X_2}_{b\in}$ פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש - $X \notin Conn$ בסתירה!

☺

<u>**משפט**</u> **(ערך הביניים):** נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Conn$.

2) לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ יש תכונת ערך ביניים.

<u>**הוכחה:**</u>

$(1) \Rightarrow (2)$:

תמונה רציפה שומרת על $Conn$. לכן $Conn \ni f(X) \subset \mathbb{R}$ ואז מהטענה הקודמת נקבל ש - $f(X) \in \{$קטעים$\}$, ואז $f(X)$ בעל תכונת ערך הביניים.

$(2) \Rightarrow (1)$:

נניח בשלילה שלא. אז $X \notin Conn$. ז"א קיים פירוק טופולוגי $X = X_1 \sqcup X_2$

נגדיר פונקציה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, אשר שולחת את X_1 ל $- 0$ ואת X_2 שולחת ל $- 1$.

X_1, X_2 פתוחות ב $- X \Leftarrow$ קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז f רציפה. אבל נקבל ש $- f(X) = \{0,1\}$.

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!

☺

דוגמאות של קבוצות קמורות:

1) כל מ"נ $(E, \|\cdot\|)$.

2) כדורים $B_r(a), B_r[a] \subset E$ בתוך מ"נ.

3) מלבנים, תיבות, אליפסוידים, ...

<u>**משפט**</u> **(האלומות – תנאי מספיק לקשירות):** נניח X מ"ט, $X = \bigcup_{j \in J} Y_j$ כך ש:

1) $\forall j \in J: Y_j \in Conn$

2) $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$

אזי $X \in Conn$.

הוכחה: מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת $z \in \bigcap_{j \in J} Y_j$.

נניח בשלילה ש – X פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות X_1, X_2 כך ש –

$$X = X_1 \sqcup X_2$$

בה"כ $z \in X_1$ (ואז $z \notin X_2$).

מתקיים – $\forall j \in J: Y_j = (Y_j \cap X_1) \sqcup (Y_j \cap X_2)$

כעת נשים לב ש - $Y_j \cap X_1$ ו - $Y_j \cap X_2$ פתוחות וזרות בתת מרחב Y_j ו$z \in Y_j \cap X_1$.

אז $Y_j \cap X_2 = \emptyset$ לכל j, אחרת היינו מקבלים ש - $Y_j \notin Conn$ (פריק).

כעת – $X_2 = \bigcup_{j \in J}(X_2 \cap Y_j) = \emptyset$ בסתירה לפירוק של X.

☺

<u>תוצאות:</u>

1) נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, כאשר $Y_1, Y_2 \in Conn$, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. אזי $X \in Conn$

(פשוט המשפט כאשר יש 2 אינדקסים).

2) **שרשור**

נניח $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k$, כאשר $Y_k \in Conn$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן –

$$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$$

אזי $X \in Conn$.

הסבר: 1) מיידי מהמשפט!

2) נובע מ - (1) ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$$\forall k \in \mathbb{N}: A_k := Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \in Conn$$

נשים לב – $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$

וברור – $A_1 \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש – $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in Conn$.

☺

<u>הערה</u> (**מרכיבי קשירות**)**:** במ"ט X נגדיר את היחס הבא –

$x \equiv y \overset{def}{=}$ אם "אפשר לחבר x ל – y ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת –

$$Conn \ni A_{x,y} \subset X$$

כך ש – $\{x, y\} \subset A$

טענה: היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

הסבר:

1) $x \equiv x$, $A_{x,x} = \{x\}$.

2) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$, $A_{y,x} \coloneqq A_{x,y}$.

3) צ"ל – $\begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \Rightarrow x \equiv z$

$$A_{x,z} \coloneqq A_{x,y} \cup A_{y,z}$$

ואכן $y \in A_{x,y}$ וגם $y \in A_{y,z}$ ואז מתוצאה 1 (שירשור) נקבל ש - $A_{x,z} \in Conn$.

__**הגדרה:**__ **מרכיב קשירות** של נק x ב X הוא $[x] \coloneqq \{y \in X | x \equiv y\}$ "מחלקה של x".

נשים לב כי – $X = \bigcup_{x \in X} [x]$.

תכונות:

- $X = \bigcup_{x \in X} [x]$ (יש חזרות! $x \equiv y \Leftrightarrow [x] = [y]$).
- מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.

__תרגיל__: הוכיחו ש T לא הומיאומורפי ל L (sans serif font).

הסבר: במרחב T יש נקודה z כך שלתת מרחב $\mathsf{T} \setminus \{z\}$ יש 3 מרכיבי קשירות.

אבל לכל $a \in \mathsf{L}$ לתת מרחב $\mathsf{L} \setminus \{a\}$ יש לכל היותר 2 מרכיבי קשירות.

- X קשיר $\Leftrightarrow$ יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

  רמז: משפט האלומות.

- $[x] \in Conn$
- $[x] = \bigcup \{A \subseteq X | x \in A, A \in Conn\}$

ז"א $[x]=$ תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את x.

- $[x]$ סגור ב – X.

רמז: תוכיחו קודם את התרגיל הבא (ואז תשתמשו בתכונה הקודמת):

__**תרגיל:**__ נניח $X = \bar{Y}$ (ז"א Y צפופה ב – X). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

דוגמה: תארו מרכיבי קשירות של:

א. $X=(0,2)\cup(2,5)\cup\{7\}$

תשובה: $[1]=(0,2),[3]=(2,5),[7]=\{7\}$

ב. $X=\{1,2,3,4\}\times\mathbb{R}$

תשובה: $\{1\}\times\mathbb{R},\{2\}\times\mathbb{R},\{3\}\times\mathbb{R},\{4\}\times\mathbb{R}$.

הגדרה: מ"ט X נקרא **"לא קשיר לחלוטין"** $(totally\ disconnected)$ אם

$[x]=\{x\}$ לכל $x\in X$ (**רק** נקודון תת קבוצה קשירה).

דוגמאות:

1) מרחבים דיסקרטיים.

2) $\mathbb{Q}$

3) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

4) * $(\mathbb{Z},d_p)$

(רמז: לכל $a\in(\mathbb{Z},d_p)$ ו $b\neq a$ קיימת סביבה סגוחה $U\in N(a)$ כך ש $b\notin U$)

5) * $(\mathbb{R},\tau_s)$ (Sorgenfrey Line) כאשר בקבוצה $\mathbb{R}$ מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s:=\{O\subseteq\mathbb{R}:x\in O\Rightarrow\exists\varepsilon>0\,[x,x+\varepsilon)\subseteq O\}$$

הגדרה: (מרכיב קשירות מסילתי): לכל מ"ט X ונקודה $x\in X$ מרכיב קשירות $[\mathrm{x}]_p$

של x מוגדר כמחלקת שקילות של x לגבי יחס שקילות הבא:

$$x\equiv_P y\ \overset{def}{=}\ \text{קיימת ב }X\text{מסילה מ }-x\text{ ל }-y$$

טענה: $\equiv_P$ יחס שקילות.

הסבר:

1) צ"ל – $x\equiv_P x$. ניקח מסילה קבועה.

2) צ"ל – $x\equiv_P y\Leftarrow y\equiv_P x$. עבור מסילה – $f:[0,1]\to X$

נגדיר "מסילה הפוכה" – $f^*(t) = f(1-t) \qquad f^*:[0,1]\to X$

3) צ"ל – $x \equiv_P z \Leftarrow \begin{cases} x \equiv_P y \\ y \equiv_P z \end{cases}$

עבור – $\begin{cases} f_1(0)=x, f_1(1)=y \\ f_2(0)=y, f_2(1)=z \end{cases}$

נגדיר $f_3:[0,1]\to X$ כך ש – $f_3(t)=\begin{cases} f_1(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$

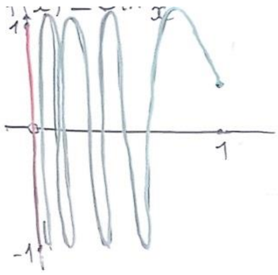
$$f_3(0)=x, f_3(1)=z$$

ונקבל ש - f_3 רציפה מהתרגיל הבא:

תרגיל: נניח $X = Y_1\cup Y_2$, Y_1,Y_2 סגורות.

נתונה פונקציה $X \xrightarrow{f} Z$ כך ש הצמצומים $f\big|_{Y_1}: Y_1\to Z$, $f\big|_{Y_2}: Y_2\to Z$ רציפות.

אז f רציפה (* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).



<u>הערה:</u> $PConn \neq Conn$

נגדיר פונקציה $(0,1] \xrightarrow{f} [-1,1]$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

נגדיר – $X := (\{0\}\times[-1,1])\cup Gr(f)$

$$(0,1] \simeq Gr(f) := \left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\in\mathbb{R}^2 \middle| 0<x\le 1\right\}$$

כעת, $Gr(f)\simeq(0,1]$ קשיר ו - $Gr(f)$ צפוף ב – X (כלומר $\overline{Gr(f)}=X$), לכן (לפי התרגיל הנ"ל) $X\in Conn$. ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן X לא קשיר מסילתית, כלומר $X\notin PConn$.

<u>תרגיל</u>: (לעתיד) לכל פונקציה רציפה $X\xrightarrow{f}Y$ מתקיים ש

$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x,f(x))|x\in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \subset X\times Y$.

בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

תרגיל: כל קבוצה קשירה ופתוחה O במרחב נורמי E היא קשירה מסילתית.

הסבר: נבחר $a\in O$ ונסמן $a\in A:=[a]_p$ מרכיב קשירות מסילתית של a במרחב O.

אז A פתוחה. כי אם $x\in A$ אז $B_\varepsilon(x)\subseteq O$ עבור ε מספיק קטן. $B_\varepsilon(x)$ קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב $B_\varepsilon(x)$ מ x לכל $y\in B_\varepsilon(x)$. אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב O מנקודה a ל y (טרנזיטיביות). לכן $B_\varepsilon(x)\subseteq A$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים $O\setminus A$ פתוח. אבל אז $O\setminus A$ קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש O פריק. לכן $O=A=[a]_p$ ואז O קשיר מסילתית (מרכיב 1).

הגדרה: X נקרא **קשיר מקומית** בנקודה $a\in X$ אם לכל סביבה $U\in N(a)$ קיימת סביבה $U\supseteq V\in N(a)$ כך ש V קשיר. אומרים: *קשיר מקומית* אם זה מתקיים בכל נקודה.

תרגיל:

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. ** תנו דוגמה של תת מרחב ב $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

קישורים מומלצים:

https://en.wikipedia.org/wiki/Homeomorphism

https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection

https://en.wikipedia.org/wiki/Connected_space

בסיס לטופולוגיה

נגדיר סימונים חדשים. נניח $\gamma \subseteq P(X)$ (אוסף תת קבוצות ב X). נגדיר:

- $\gamma^{\cup} := \{\cup\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma\}$ (כל מיני איחודים דרך איברים של γ)
- $\gamma^{\cap F} := \{\cap\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma, \beta\ is\ finite\}$ (חיתוכים סופיים דרך איברים של γ)

תמיד: $\gamma \subseteq \gamma^{\cap F}$ $\gamma \subseteq \gamma^{\cup}$ $\varnothing \in \gamma^{\cup}$ $\varnothing \in \gamma^{\cap F}$ (ניקח β קבוצה ריקה)

למשל אקסיומות טופולוגיה אפשר לכתוב כך:

(t_1) $\varnothing, X \in \tau$ (t_2) $\tau^{\cap F} = \tau$ (t_3) $\tau^{\cup} = \tau$.

<u>הגדרה:</u> (בסיס $basis$) יהי (X,τ) מ"ט. $\gamma \subseteq \tau$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה τ) אם כל קבוצה פתוחה (לא ריקה) שווה לאיחוד איברים מ $-\gamma$.

<u>הערה:</u> (הגדרה שקולה) התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה τ.
2. $\gamma^{\cup} = \tau$.
3. $\gamma \subseteq \tau$ ולכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$.

<u>הגדרה:</u> אומרים ש - (X,τ) **בעל תכונת מנייה שנייה** ($second\ countable$) ונסמן:

$$(X,\tau) \in B_2$$

אם קיים **בסיס** γ **בן מנייה**.

<u>דוגמאות</u>: (תשתמשו בהגדרה (3))

- ב $X = \mathbb{R}$ $\gamma_1 = \{(a,b) \mid a < b\}$ וגם $\gamma_2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ בסיסים.
- ב $X = \mathbb{R}^2$
  - א. $\gamma_0 =$\{עיגולים פתוחים\}
  - ב. $\gamma_1 = \{(a,b) \times (c,d)\} =$\{מלבנים פתוחים\}
  - ג. $\gamma_2 =$\{ריבועים פתוחים\} $\gamma_3 =$\{משולשים פתוחים\}
  - ד. $\gamma_4 =$\{עיגולים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות"\}
- $\mathbb{R}^n \in B_2$

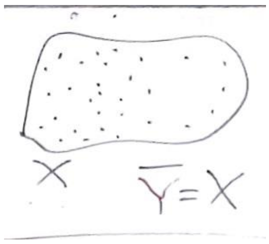
{כדורים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות" ורדיוסים $\frac{1}{k}$}$=\gamma_4$ בן מניה !

- לכל (X,d) "כדורים פתוחים" בסיס לטופולוגיית $top(d)$.

  א. $\gamma \coloneqq \{B_r(a)\}_{\substack{a\in X\\ r>0}}$ $\gamma^{\cup}=top(d)$ (ראו משפט: "כדורים בסיס").

  ב. גם $\gamma_1 \coloneqq \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in X\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס.

<u>**טענה**</u>: לכל (X,d) ולכל X $\bar{Y}=X$ (כלומר Y צפוף בX) $\gamma_2 \coloneqq \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in Y\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס ל $top(d)$.



<u>**תוצאה חשובה:**</u> אם מרחב מטרי (X,d) הוא ספרבילי אז הוא גם B_2.

$$(X,d)\in B_2 \Leftarrow (X,d)\in Sep$$

<u>**טענה**</u>: הוכיחו ש B_2 תכונה <u>תורשתית</u>.

רמז: תבדקו שאם γ בסיס ל (X,τ) ו $Z\subseteq X$ תת קבוצה אז $\gamma_Z \coloneqq \{G\cap Z \mid G\in\gamma\}$ בסיס לתת מרחב (Z,τ_Z).

<u>טענה</u>: לכל מרחב דיסקרטי (X,τ_{discr}) אוסף כל הנקודונים $\gamma_0=\{\{x\}\mid x\in X\}$ הוא בסיס ל (X,τ_{discr}). לכל בסיס אחר γ מתקיים $\gamma_0\subseteq\gamma$.

הסיקו: $(X,\tau_{discr})\in B_2 \Leftrightarrow |X|\le\aleph_0$.

למשל: $(\mathbb{R},\tau_{discr})\notin B_2$

<u>משפט</u>: $B_2 \subset Sep$.

<u>הוכחה</u>: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). צריך למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

בה"כ $\varnothing \notin \gamma$. לכל $G \in \gamma$ נבחר נקודה אחת בלבד $y_G \in G$. נגדיר

$Y_\gamma := \{y_G \mid G \in \gamma\}$ אז Y_γ בת מניה (כי γ ב"מ) ו Y_γ צפופה ב X. אכן נוכיח $cl(Y_\gamma) = X$.

לכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$. לפי הבנייה קיים $y_G \in G_a$

לכן $y_G \in Y_\gamma \cap O \neq \varnothing$.

זה מוכיח שכל נקודה $a \in X$ שייכת לסגור של Y_γ. ז"א $cl(Y_\gamma) = X$.

☺

<u>תוצאה</u>: $Metriz \cap B_2 = Metriz \cap Sep$

<u>תוצאה</u>: במרחבים מטריזביליים – ספרביליות כן תורשתית.

דוגמה: $B_2 \neq Sep$.

הסבר: נוכיח בהמשך שקו סורגנפראי מקיים: $(\mathbb{R},\tau_s) \in Sep \quad (\mathbb{R},\tau_s) \notin B_2$.

<u>טענה</u>: נניח X קבוצה ו γ אוסף תת קבוצות ב X. התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה מסוימת.
2. א. $X \in \gamma$

ב. חיתוך של 2 קבוצות מ γ אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ γ.

<u>הערה</u>: ב שקול ל ב*: $\forall A,B \in \gamma\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \gamma \quad x \in C \subseteq A \cap B$

ב* שקול ל ב**: $\gamma^{\cap_F} \subseteq \gamma^{\cup}$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר אוסף $\tau := \gamma^{\cup}$. מ"ל γ טופולוגיה.

$(t_1) \quad \varnothing, X \in \tau$

הסבר: $X \in \tau$. בגלל תנאי א. תנאי $\varnothing \in \tau$ נובע מהתכונה הנ"ל על $\gamma^{\cup}$.

$(t_2) \quad \tau^{\cap_F} = \tau$

הסבר: $\gamma = \gamma^{\cup} = (\gamma^{\cup})^{\cup} \subseteq (\gamma^{\cap_F})^{\cup} = (\gamma^{\cup})^{\cap_F} = \tau^{\cap_F}$.

$(t_3) \quad \tau^{\cup} = \tau$

הסבר: $\gamma = \gamma^{\cup} = (\gamma^{\cup})^{\cup} = \tau^{\cup}$.

☺

בסיס מקומי

הגדרה: (בסיס מקומי) $\alpha \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** לנקודה a, אם לכל $U \in N(a)$ קיים $V \in \alpha$ כך ש $V \subseteq U$.

הגדרה: אומרים ש- (X,τ) **בעל תכונת מנייה ראשונה**, ונסמן: $(X,\tau) \in B_1$

אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

דוגמה: לכל (X,d) – דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה a –

$\alpha_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$

$\alpha_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ בן מנייה !

תוצאה: $Metriz \subset B_1$

דוגמה: $(X,\tau_{discr}) \in \mathrm{B}_1$.

הסבר: לכל $a \in (X,\tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.

תרגיל: B_1 תכומה תורשתית.

טענה: $B_2 \subset B_1$

הסבר: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). לכל $a \in X$ נגדיר $\gamma_a := \{A \in \gamma \mid a \in A\}$.

אז γ_a בסיס מקומי בנקודה a.

דוגמה: $B_2 \neq B_1$.

$$\begin{cases} (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \in B_1 \\ (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \notin B_2 \end{cases}$$

הערה: $Discrete \subset Metriz \subset B_1$

$Metriz \cap Sep \subset B_2 \subset B_1$

הגדרה: $\mathbf{dim(X) = 0} \overset{def}{=}$ קיים בסיס γ לטופולוגיה כך שלכל $A \in \gamma$ קבוצה סגוחה .

דוגמאות:

א. $\dim(X, \tau_{discr}) = 0$

ב. $\dim(\mathbb{Q}) = 0$.

$\gamma := \{(a,b) \cap \mathbb{Q} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

$(a,b) \cap \mathbb{Q}$ קבוצה סגוחה ב - $\mathbb{Q}$.

ג. הוכיחו: $\dim(\mathbb{Z}, d_p) = 0$.

ד. $\dim(\mathbb{R}, \tau_s) = 0$ Sorgenfrey line

תזכורת: $O \in \tau_s \overset{def}{=} x \in O \Rightarrow \exists\, \epsilon = \epsilon_x > 0 : [x, x+\epsilon_x) \subset O$

תכונות קו סורגנפריי:

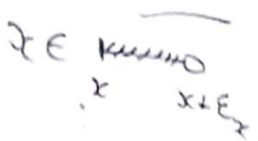
- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_2$
- א. $\tau \neq \tau_s$ ב. $\tau \subset \tau_s$.

  הסבר: א. $[0,1) \notin \tau$, $[0,1) \in \tau_s$.

  ב. מ"ל שבסיס של טופולוגיה טבעית τ מוכל ב τ_s .

  $(a,b) = \cup\{[x, x+\varepsilon_x) | [x, x+\varepsilon_x) \subset (a,b)\} \in \tau_s$
- $\dim(\mathbb{R}, \tau_s) = 0$.

  <u>הסבר:</u> $\gamma := \{[a,b) : a < b\} \subset \tau_s$ בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

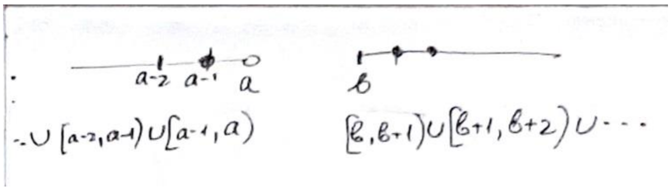


$O = \cup_{x \in O} [x, x+\epsilon_x)$

- טענת עזר: כל $[a,b)$ **סגוחה** –

א) $[a,b) \in \tau_s$ ברור (כלומר פתוחה לפי ההגדרה).

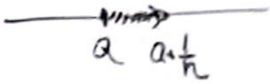
ב) $[a,\mathrm{b})$ גם סגורה כי $\mathbb{R}/[a,b) = (-\infty,a) \cup [b,\infty)$ פתוחה.



- $(\mathbb{R},\tau_s) \in Sep$

הסבר: רציונליים $\mathbb{Q}$ קבוצה צפופה גם בטופולוגית τ_s כי $[a,\mathrm{b}) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$

- $(\mathbb{R},\tau_s) \in B_1$



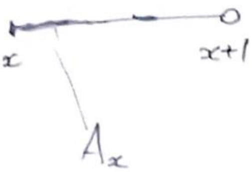
<u>הסבר:</u>

$$\alpha \coloneqq \left\{U_n \coloneqq \left[a, a+\frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \subset N_{\tau_s}(a)$$

בסיס מקומי בן מנייה לנק' $a \in \mathbb{R}$.

- **<u>טענה</u>**: $(\mathbb{R},\tau_s) \notin B_2$

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקיים בסיס $\gamma \subset \tau_s$ כך ש γ בן מנייה.



$[x,x+1) \in \tau_s$ פתוחה, לכן הוא שווה לאיחוד איברים מבסיס γ.

אז קיים $A_x \in \gamma$ כך ש - $x \in A_x \subset [x,x+1)$.

נבחר A_x כזה ונגדיר העתקה $\quad x \longmapsto A_x \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \gamma$

φ חח"ע $(x \neq y \Rightarrow A_x \neq A_y)$.

$$2^{\aleph_0} = \aleph = |\mathbb{R}| = |\varphi(\mathbb{R})| \leq |\gamma|$$

מכאן $|\gamma| \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, לכן γ לא בת מנייה!

- $(\mathbb{R},\tau_s) \in T_{3\frac{1}{2}}$.

<u>הסבר:</u> נובע מהטענה הבאה:

<u>טענה:</u> אם $X \in T_2$ וגם $\dim(X) = 0$ אז - $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

<u>רמז:</u> אם $O \subset X$ קב' סגוהה אזי –

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \notin O \end{cases}$$

רציפה! (4 מקרים .... ראינו הוכחה דומה)

- $(\mathbb{R},\tau_s) \notin Metriz$.

<u>הסבר:</u> $Metr \cap Sep \subset B_2$. אבל $(\mathbb{R},\tau_s) \in Sep$ $(\mathbb{R},\tau_s) \notin B_2$.

תרגיל: הוכיחו שאם $\dim X = 0, X \in T_2$ אז X לא קשיר לחלוטין.

<u>קשר בין עקרון *Heine* ותכונת B_1</u>

<u>**הגדרה:**</u> אומרים שמ"ט הוא בעל **תכונת FU** $(Frechet - Urysohn)$ אם:

$$\forall A \subseteq X: scl(A) = cl(A)$$

<u>**הערה:**</u> $Metriz \subset B_1 \subset FU$

<u>**הערה:**</u> למדנו דוגמה של מ"ט שהוא לא FU.

<u>**טענה:**</u> $B_1 \subseteq FU$.

הוכחה מקוצרת: שימו לב שאם $X \in B_1$ אז לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מנייה $\alpha = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ <u>מונוטוני</u> (ז"א $U_{n+1} \subseteq U_n$). ואז ההמשך דומה למקרה של מ"מ

<u>**משפט**</u> **(עיקרון *Heine* מתוקן):** נניח $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. נניח ש - $(X,\tau) \in FU$, אין הגבלה על Y. אז התנאים הבאים שקולים:

א) f רציפה.

ב) f שומרת על התכנסות.

<u>**הוכחה:**</u>

$(1) \Leftarrow (2)$: תמיד (ממשפט $\frac{1}{2}$ היינה).

$(2) \Leftarrow (1)$: מ"ל (קריטריון (5) במשפט הנ"ל על רציפות) –

$$\forall A \subseteq X: \boxed{f\big(cl(A)\big) \subseteq cl\big(f(A)\big)}$$

נתון $(X,\tau) \in FU$. ז"א – $scl(A) = cl(A)$

לכן שקול להוכיח – $f\big(scl(A)\big) \subseteq cl\big(f(A)\big)$

נתון (2) אומר ש – f שומרת על ההתכנסות. ז"א – $x_n \xrightarrow{\tau} z \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(z)$

ובפרט עבור סדרות מ – $a_n \in A$:

$$a_n \xrightarrow{\tau} z \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow{\sigma} f(z)$$

$$z \in scl(A) \Rightarrow f(z) \in scl\big(f(A)\big)$$

לכן קיבלנו – $\boxed{f\big(scl(A)\big) \subseteq scl\big(f(A)\big)}$

ואז: $f\big(cl(A)\big) \underbrace{=}_{X\in FU} f\big(scl(A)\big) \underbrace{\subseteq}_{\text{הראנו}} scl\big(f(A)\big) \underbrace{\subseteq}_{\text{תמיד מתקיים}} cl\big(f(A)\big)$

☺

<u>תוצאה:</u> עיקרון $Heine$ תמיד נכון למשל עבור קו $Sorgenfrey$ –$(\mathbb{R},\tau_s) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ כי $(\mathbb{R},\tau_s) \in B_1 \subset FU$.

<u>הערה:</u> בטופולוגיה, באנליזה ... יש צורך אמיתי ב"סדרות מוכללות":

$(M,\preccurlyeq)$ קבוצה <u>סדורה חלקית</u> **מכוונת** (לכל $\forall a,b \in M\ \exists c \in M\ a \le c, b \le c$).

<u>דוגמה חשובה</u>: כל בסיס מקומי דוגמה לקבוצה סדורה מכוונת.

סדרה מוכללת או רשת (*generalized sequences or net*) היא פונקציה $(M,\preccurlyeq) \xrightarrow{f} X$ (סדרה רגילה: $(\mathbb{N},\le) \xrightarrow{f} X$).

- דרך רשתות אפשר לתת תיאור של $cl(A)$.

$z \in cl(A) \Leftrightarrow z$ גבול של סדרה מוכללת

ואז יש הכללת עיקרון $Heine$ ...

<u>שימו לב:</u> למשל אינטגרלים זה סוג של גבול דרך רשתות מסוימות.

ספר מומלץ: ד. ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה.