ב"ש בדידה תשעט מועד ב

1. פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תקרא חצי תלולה אם

$$\forall x_1\in\mathbb{R}\exists x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1<0)\vee(f(x_1)<f(x_2))$$

פתרון: פונקציה היא חצי תלולה אם לכל $x_1\geq 0$ קיים x_2 עבורו $f(x_1)<f(x_2)$. השלילה הלוגית היא

$$\exists x_1\in\mathbb{R}\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1\geq 0)\wedge(f(x_1)\geq f(x_2))$$

כלומר שקיים x_1 אי-שלילי כך שלכל x_1 מקיים $f(x_1)\geq f(x_2)$

(א) האם $f(x)=x^2$ חצי תלולה?
פתרון: כן. יהא x_1 ממשי. צריך להוכיח שקיים x_2 המקיים $(f(x_1)<f(x_2))$ או $(x_1<0)$. אם x_1 שלילי סיימנו. אחרת, $x_1\geq 0$ ומכיוון ש x^2 פונקציה עולה ממש ב $[0,\infty)$ נקבל שעבור $x_2=x_1+1$ מתקיים

$$f(x_1)<f(x_2)$$

(ב) האם $f(x)=e^{-x}$ שאפתנית?
פתרון: כן. יהא x_1 ממשי. צריך להוכיח שקיים x_2 המקיים $(f(x_1)<f(x_2))$ או $(x_1<0)$. אם x_1 שלילי סיימנו. אחרת, $x_1\geq 0$ ומכיוון ש e^{-x} פונקציה יורדת ממש ב $[-1,\infty)$ נקבל שעבור $x_2=-1$ מתקיים

$$f(x_1)<f(x_2)=e$$

(ג) תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ שהיא חצי תלולה כך שהפונקציה $-f(x)$ אינה חצי תלולה?
פתרון: למשל, $f(x)=x^2$ מסעיף א היא חצי תלולה. לעומת זאת $-x^2$ אינה חצי תלולה. הוכחה: צריך להוכיח כי עבור $h(x)=-x^2$ מתקיים כי

$$\exists x_1\in\mathbb{R}\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1\geq 0)\wedge(h(x_1)\geq h(x_2))$$

אכן, נבחר $x_1=0$ ונרצה להוכיח שלכל x_2 מתקיים $h(x_1)\geq h(x_2)$ (שהרי $x_1\geq 0$ מתקיים לפי בחירת $x_1=0$). כיוון שלכל $x\neq 0$ מתקיים ש $x^2>0$ ולכן $-x^2<0$ נקבל ש

$$h(x_1)=0\geq-(x_2)^2=h(x_2)$$

(ושיוויון מתקיים רק עבור $x_2=x_1=0$, בשאר המקרים, ראינו שיש קטן ממש).

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $B\cap C=A$ אזי $A\backslash(B\backslash C)=A$.

פתרון: הוכחה: בהנחה ש $A = B \cap C$ נסיק כי $A = A \cap B \supseteq C$ ולכן $A \supseteq C$. ולכן

$$A \supseteq A \backslash (B \backslash C) \underbrace{=}_{\text{זהות}} A \cap (B \backslash C)^c \underbrace{=}_{\text{זהות}} A \cap (B \cap C^c)^c \underbrace{=}_{\text{דה-מורגן}} A \cap (B^c \cup C) \supseteq A \cap C \underbrace{=}_{A \supseteq C} A$$

וקיבלנו ש $A \supseteq A \backslash (B \backslash C) \supseteq A$ ולכן יש שיוויון בניהם.

(ב) לכל שלוש קבוצות A, B, Cמתקיים $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$.

פתרון: הפרכה: $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2\}$ אזי

$$(A \cup B) \backslash C = C \backslash C = \emptyset$$

לעומת זאת

$$A \cup (B \backslash C) = A \cup \emptyset = A$$

ומכיוון ש $A \neq \emptyset$, השיוויון שבשאלה לא מתקיים.

(ג) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$.

פתרון: הוכחה:

$$A \backslash (A \cap B) \underbrace{=}_{\text{זהות}} A \cap (A \cap B)^c \underbrace{=}_{\text{דה-מורגן}} A \cap (A^c \cup B^c) \underbrace{=}_{\text{פילוג}} (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = \emptyset \cup (A \cap B^c) = (A \cap B^c) = A \backslash B^c$$

3. הוכיחו באינדוקציה (רגילה או מלאה) כי:

(א) לכל n מתקיים $6n^2 + 2n$ מתחלק ב 4 ללא שארית.

פתרון: הוכחה:

- בסיס $n = 1$: אכן, $6 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 8$ מתחלק ב 4 ללא שארית.
- צעד: נניח נכונות עבור n, כלומר, $6n^2 + 2n$ מתחלק ב 4 ללא שארית. נוכיח נכונות עבור $n + 1$, כלומר, $6(n+1)^2 + 2(n+1)$ מתחלק ב 4 ללא שארית. מתקיים

$$6(n+1)^2 + 2(n+1) = 6\left(n^2 + 2n + 1\right) + 2(n+1) = \left(6n^2 + 2n\right) + (12n + 8)$$

ומכיוון ש $\left(6n^2 + 2n\right)$מתחלק ב 4 ללא שארית (הנחת האינדוקציה) וגם $12n + 8$ מתחלק ב 4 ללא שארית אז גם הסכום שלהם מתחלק ב 4 ללא שארית.

(ב) לכל n מתקיים $2n^3 - 2n$ מתחלק ב 4 ללא שארית.

פתרון: מתקיים

$$2n^3 - 2n = 2n\left(n^2 - 1\right)$$

ולכן מספיק להוכיח ש $n\left(n^2 - 1\right)$ מתחלק ב 2 ללא שארית. אם n זוגי סיימנו. אם n אי זוגי,

$$n\left(n^2 - 1\right) = n(n-1)(n+1)$$

מתחלק ב 4 כי $n - 1, n + 1$ שניהם זוגיים. אפשר לעשות גם הוכחה באינדוקציה בדומה לסעיף קודם.

4. תהיינה $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $f \circ g$ הפיכה וגם $g \circ f$ הפיכה אז g, f הפיכה.

פתרון: הוכחה:

כיוון ש $f \circ g$ הפיכה אז בפרט היא חח"ע ועל ולכן g חח"ע ו f על. מכיוון ש $g \circ f$ הפיכה היא בפרט חח"ע ועל ולכן f חח"ע ו g על. קיבלנו ש g חח"ע + על וגם f חח"ע ועל ולכן f וגם g הפיכות.

(ב) אם f חח"ע וגם $f \circ g$ הפיכה אזי g הפיכה.

פתרון: הוכחה:

כיוון ש $f \circ g$ הפיכה אז בפרט היא על ולכן f על. בצירוף ההנחה ש f חח"ע נסיק ש f הפיכה (כי חח"ע ועל) לכן קיימת לה הופכית f^{-1} ואז

$$g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g)$$

הרכבה של הפיכות ולכן הפיכה.

(ג) אם $f \circ f \circ g$ הפיכה אזי $f \circ g$ הפיכה.

פתרון: הפרכה: נגדיר $g(n) = n + 2$ ו

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & n \geq 2 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

אזי

$$(f \circ f \circ g)(n) = f(f(g(n))) = f(f(n+2)) = f(n+1) = n$$

וכלן $f \circ f \circ g = Id$ ולכן הפיכה. אבל

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = f(n+2) = n+1$$

ולכן ל 1 אין מקור. ולכן $f \circ g$ אינה על ובפרט אינה הפיכה.

5. כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ כך ש:

(א) $x_1 \geq 3$, $x_1 \geq 1$ וגם $x_3 \geq 1$.

פתרון: נגדיר $y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3 - 1$ ו $y_4 = x_4, y_5 = x_5$ ונקבל את השאלה: כמה פתרונות שלמים אי שליילים יש למשוואה

$$(y_1 + 3) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) + y_4 + y_5 = 10$$

שזה המשוואה

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 5$$

והתשובה לשאלה זו היא $\binom{9}{4} = \binom{5+5-1}{5-1}$.

(ב) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

פתרון: נקבל את השאלה: כמה פתרונות שלמים אי שליילים יש למשוואה

$$4x_4 + x_5 = 10$$

ולכן $0 \leq x_4 \leq 2$ ולכל ערך של x_4 נקבל ערך יחיד של x_5 שהוא $x_5 = 10 - 4x_4$. לכן התשובה היא שיש 3 אפשרויות.

(ג) $x_1 < 3$, $x_2 < 3$ וגם $x_3 < 3$.

פתרון: נסמן ב U את קבוצת כל הפתרונות האי-שליליים למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$. ברור ש $|U| = \binom{10+5-1}{5-1} = \binom{14}{4}$. עוד נסמן A_i ($1 \leq i \leq 3$) להיות קבוצת הפתרונות האי-שליליים למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ עם התנאי ש $x_i \geq 3$. אז

$$|A_i| = \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$$

וחיתוך של כל שניים שונים

$$|A_i \cap A_j| = \binom{4+5-1}{5-1} = \binom{8}{4}$$

והחיתוך של כולם

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{3+5-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5$$

וכעת נרצה לחשב את $\left|\cap_{i=1}^{3} A_i^c\right|$ונעשה זאת עם הכלה-הדחה

$$\left|\cap_{i=1}^{3} A_i^c\right| = \left|\left(\cup_{i=1}^{3} A_i\right)^c\right| = |U| - \left|\cup_{i=1}^{3} A_i\right| = |U| - \left[\sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le 3} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\right] =$$

$$= \binom{14}{4} - \left[3 \cdot \binom{11}{4} - 3 \cdot \binom{8}{4} + 5\right] = \binom{14}{4} - 3 \cdot \binom{11}{4} + 3 \cdot \binom{8}{4} - 5 = 216$$