

אלגברה לינארית 2 | תש"ף מועד א'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

(סעיף א)

$$A = \begin{pmatrix} 10001 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 10003 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 10005 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 10007 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 10009 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10011 \end{pmatrix}$$

יש למצוא את כל הערכים העצמיים של מטריצה A , נמצא את שורשי הפולינום האופייני, ניעזר בלפס ובדירוג לפי עמודות ושורות.

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x - 10001 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & x - 10003 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & x - 10005 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & x - 10007 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & x - 10009 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & x - 10011 \end{pmatrix} =_{C_5 - 3C_2}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x - 10001 & -3 & -5 & -7 & 0 & -11 \\ -1 & x - 10003 & -5 & -7 & -3x + 30000 & -11 \\ -1 & -3 & x - 10005 & -7 & 0 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & x - 10007 & 0 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & x - 10000 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & 0 & x - 10011 \end{pmatrix}$$

$$= 3(x - 10000) \cdot \det \begin{pmatrix} x - 10001 & -3 & -5 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & x - 10005 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & x - 10007 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & x - 10011 \end{pmatrix} +$$

$$(x - 10000) \cdot \det \begin{pmatrix} x - 10001 & -3 & -5 & -7 & -11 \\ -1 & x - 10003 & -5 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & x - 10005 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & x - 10007 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & x - 10011 \end{pmatrix}$$

מכאן אין צורך להמשיך ולפתח. משום שניתן לראות ש-10,000 הוא ערך עצמי. (מהווה גורם משותף לשתי הדטרמיננטות), נמצא ריבוי גיאומטרי שלו

$$V_{10,000} = N \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, ריבוי גיאומטרי הוא 5.

$$k_{\lambda_1} \geq 5 \Leftrightarrow m_{\lambda_1} = 5$$

אבל נשים לב שסכום כל השורות במטריצה A שווה ל-10,036 כלומר אם נכפול את המטריצה A ב- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ נקבל

$$Av = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,036 \\ 10,036 \\ 10,036 \\ 10,036 \\ 10,036 \\ 10,036 \\ 10,036 \end{pmatrix} = 10,036 \cdot v$$

סך הכל גם 10,036 ערך עצמי ולכן,

$\lambda_1 = 10,000$ בעל ריבוי אלגברי 5 (אחרת לא יכול להיות ע"ע נוסף)

$\lambda_2 = 10,036$ בעל ריבוי אלגברי 1 (אחרת לא יכול להיות $k_{\lambda_1} \geq 5$)

סכום הריבויים האלגבריים שווה ל-6 שזוהי מעלת הפולינום האופייני, ולכן מצאנו את כל שורשיו וסיימנו אפילו מבלי להמשיך לפתח את הדטרמיננטה.

שאלה 2

(סעיף א)

(פתרון מתגבור עם אריאל ויצמן)

יהי V ממ"פ מעל \mathbb{C} ויהיו $a, b \in V$ ויהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית המוגדרת כך

$$Tv = \langle v, a \rangle b$$

נמצא את T^* ממש לפי ההגדרה. לכל $u, v \in V$

$$\langle v, T^*u \rangle = \langle Tv, u \rangle = \langle \langle v, a \rangle b, u \rangle = \langle v, a \rangle \cdot \langle b, u \rangle = \langle v, \overline{\langle b, u \rangle} \cdot a \rangle = \langle v, \langle u, b \rangle \cdot a \rangle$$

כעת קיבלנו

$$\langle v, T^*u - \langle u, b \rangle \cdot a \rangle$$

לכל $u, v \in V$ בפרט ניקח $v = T^*u - \langle u, b \rangle \cdot a$ ונקבל

$$\langle T^*u - \langle u, b \rangle \cdot a, T^*u - \langle u, b \rangle \cdot a \rangle = 0$$

ומאי שליליות

$$T^*u - \langle u, b \rangle \cdot a = 0$$

ולכן

$$T^*u = \langle u, b \rangle \cdot a$$

שאלה 3

(סעיף א)

יהי V ממ"פ מעל \mathbb{R} עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$$T: V \rightarrow V \text{ אופרטור לינארי המוגדר כך } Tv = Av \text{ ותהי } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

אפשר בקלות לחשב כי

$$C(A) = \text{span}\left\{b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u \notin C(A) \text{ ומתקיים}$$

אבל $Im(T) = C(A)$ (לוקחים בסיס סטנדרטי)

נרצה למצוא את הוקטור ב- $Im(T)$ כלומר $C(A)$ הקרוב ביותר ל- u , כלומר ההיטל על u על $C(A)$

$$\pi_{C(A)}(u) = \frac{\langle u, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{\langle u, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} b_2 = \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{9}{51} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{5}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118/187 \\ 5/11 \\ 9/51 \\ 486/187 \end{pmatrix}$$

(סעיף ב)

יהי R מרחב העמודות של A^t , כלומר $R(A)$

מצא בסיס אורתונורמלי ל- R ול- R^\perp (כלומר $N(A)$)

ראשית, הבסיס ל- $R(A)$ הוא $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 נפעיל גראם שמידט על מנת להפוך את הבסיס לאורתונורמלי

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

כעת ננרמל

$$w_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$w_2' = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}}{\sqrt{12/16}} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix}$$

כלומר הבסיס האורתונורמלי ל- R הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ כעת הבסיס ל-} N(A) \text{ הינו}$$

נפעיל גראם-שמידט

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \|^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת ננרמל

$$w'_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w'_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1/2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ כלומר הבסיס האורתונורמלי ל-} R^\perp \text{ הינו}$$

(סעיף ג)

$$H = R^\perp \text{ וצריך להוכיח } H = \ker(T)$$

אבל זה נובע ממש מההגדרה (לוקחים בסיס סטנדרטי ואז) $\ker(T) = N(A) = R^\perp$

שאלה 4

הוכיחו/הפריכו:

(סעיף א)

בהינתן T אופרטור צמוד לעצמו אזי $T + iI$ אופרטור הפיך
הוכחה: ראינו בהרצאה שלכל אופרטור צמוד לעצמו מתקיים $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ נסמן $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$
וראינו שעבור $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ מתקיים

$$\sigma(p(T)) = \{p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)\}$$

ניקח בפרט $p(x) = x + i$
ונקבל

$$\sigma(T + iI) = \{\lambda_1 + i, \dots, \lambda_n + i\} \not\subseteq \mathbb{R}$$

כעת $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ ובפרט לכל $\lambda_i \neq -i$ לכל $1 \leq i \leq n$ ולכן $\lambda_i + i \neq 0$. לכן $0 \notin \sigma(T + iI)$ וממשפט היא הפיכה.

(סעיף ב)

אם A מטריצה הניתנת ללעסון וכל הע"ע שלה הם $1, -1$ אז מתקיים $A^2 = I_n$
הוכחה אם A ניתנת ללעסון אזי קיימת D אלכסונית ו P מלכסנת כך שמתקיים

$$P^{-1}AP = D$$

$$D^2 = I \text{ ובפרט מתקיים } \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \text{ אלכסונית מהצורה}$$

לעת

$$A = PDP^{-1}$$

ונעלה את שני הצדדים בריבוע

$$A^2 = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) = PD^2P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = PP^{-1} = I$$

(סעיף ג)

אם מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מקיימת $A + A^* = I + A^2$ אז A ניתנת ללכסון אוניטרי
הוכחה

מעל \mathbb{C} כל פולינום מ"ל לכן צריך להוכיח כי A נורמלית לקבל לכסון אוניטרי.
נראה $AA^* = A^*A$, נראה שהן מתחלפות

$$A^* = A^2 - A + I$$

נכפול ב A מימין ונקבל

$$AA^* = A^3 - A^2 + A$$

נכפול ב A משמאל ונקבל

$$A^*A = A^3 - A^2 + A$$

וסיימנו.

שאלה 5

נתון שעבור $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מתקיים $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$

(סעיף א)

A הפיכה- לא מתקיים לאף A

משום ש-0 ע"ע

ואז מתקיים

$$\det(o \cdot I - a) = 0$$

וממשפט מלינארית 1

$A \Leftarrow \det(A) = 0$ לא הפיכה.

(סעיף ב)

A אורתוגונלית-לא מתקיים לאף A

כלומר מתבקש ש $AA^* = A^*A = I$

אבל הראינו שהיא לא הפיכה וסיימנו.

(סעיף ג)

A = A^3 - מתקיים לכל A

בעצם יש לנו 3 ע"ע ולכן המטריצה לכסינה,

קיימת P הפיכה כך ש

$$D = P^{-1}AP$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ או } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ אבל}$$

ובכל המקרים $D^3 = D$

לחילופין, אפשר לבחור מקרה אחד וכל השאר דומים לו מכיוון שמדובר בסך הכל בשינוי סדר העמודות בP

וכעת

$$PDP^{-1} = A$$

ניעזר בכך ש $D = D^3$

ונקבל

$$A^3 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^3P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

רסיימנו.