פתרון 4 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות $u(x,y)$ הבאות, מצאו $v(x,y)$ כך שהפונקציה

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

תהיה גזירה בתחום הנתון. בטאו את f לפי z (יוצא משהו פשוט).

(א) $u(x,y)=xe^x\cos y-ye^x\sin y$ בכל $\mathbb{C}$.
פתרון: נמצא את v לפי משוואות קושי רימן

$$u_x(x,y)=(e^x+xe^x)\cos y-e^xy\sin y=v_y$$

ולכן

$$v(x,y)=\int(e^x+xe^x)\cos y-e^xy\sin y\mathrm{d}y$$

נזכור ש

$$\int y\sin y\mathrm{d}y=-y\cos y+\int\cos y\mathrm{d}y=-y\cos y+\sin y$$

ולכן

$$v(x,y)=(e^x+xe^x)\sin y+e^x(y\cos y-\sin y)+C(x)=xe^x\sin y+e^xy\cos y+C(x)$$

לפי משוואות קושי רימן השנייה,

$$v_x(x,y)=(e^x+xe^x)\sin y+e^xy\cos y+C'(x)=xe^x\sin y+e^x\sin y+e^xy\cos y=-u_y(x,y)$$

כלומר

$$C'(x)=0$$

ולכן $C(x)$ קבוע. כלומר

$$v(x,y)=xe^x\sin y+e^xy\cos y+D\quad D\in\mathbb{R}$$

כמו כן קל לראות ש u,v שקיבלנו מקיימות את משוואות קושי רימן ולכן f שקיבלנו באמת גזירה. נשים לב ש

$$\begin{aligned}f(z)&=xe^x\cos y-ye^x\sin y+i(xe^x\sin y+e^xy\cos y+D)\\&=xe^x(\cos y+i\sin y)-ye^x(\sin y-i\cos y)+iD\\&=xe^xe^{iy}+iye^x(\cos y+i\sin y)+iD\\&=xe^{x+iy}+iye^{x+iy}+iD=ze^z+iD\end{aligned}$$

(ב) $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}+x$ ב $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
פתרון: כמו בסעיף הקודם

$$u_y=\frac{-2xy}{x^2+y^2}=-v_x$$

כלומר

$$v_x=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

ולכן

$$v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+C(y)$$

לפי משוואת קושי רימן השניה

$$u_x=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}+1=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}+C'(y)$$

ולכן

$$C(y)=y+D \quad D\in\mathbb{R}$$

כלומר

$$v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+y+D$$

וקל לוודא שמשוואות קושי רימן מתקיימות. כמו כן,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x}{x^2+y^2}+x+i(-\frac{y}{x^2+y^2}+y+D) \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2}+x+iy+iD=\frac{\overline{z}}{|z|^2}+z+iD \\ &= z+\frac{1}{z}+iD \end{aligned}$$

2. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos\overline{z}$ גזירה.
פתרון:

$$\cos\overline{z}=\frac{e^{i(x-iy)}+e^{-i(x-iy)}}{2}=\frac{e^{ix}e^{y}+e^{-ix}e^{-y}}{2}$$

ברור שה $\frac{1}{2}$ לא משפיע אז נתעלם ממנו לנוחות. יש לנו

$$(\cos x+i\sin x)e^y+e^{-y}(\cos x-i\sin x)$$

כלומר

$$u(x,y)=\cos x(e^y+e^{-y}) \quad v(x,y)=\sin x(e^y-e^{-y})$$

ברור שהכל דיפרנציאבילי

$$u_x = -\sin x(e^y + e^{-y})$$
$$u_y = \cos x(e^y - e^{-y})$$
$$v_x = \cos x(e^y - e^{-y})$$
$$v_y = \sin x(e^y + e^{-y})$$

כלומר משוואות קושי רימן הן

$$-\sin x(e^y + e^{-y}) = \sin x(e^y + e^{-y})$$

$$\cos x(e^y - e^{-y}) = -\cos x(e^y - e^{-y})$$

היות ש $e^y + e^{-y} > 0$ המשוואה הראשונה מכריחה ש $\sin x = 0$ כלומר ש $x = \pi k$ לכן $\cos x \neq 0$ והמשוואה השניה אומרת ש

$$e^y - e^{-y} = 0$$

שזה בקלות מכריח $y = 0$. לכן הנקודות היחידות שבהן הפונקציה גזירה הן

$$\{(\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

.3

א. $$(1+i)^{2i} = e^{2i\log(1+i)} = e^{2i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)} = e^{i\ln 2}e^{-\left(\frac{\pi}{2}+4\pi k\right)}$$

ב. $$(-i)^{-i} = e^{-i\left(\ln(1)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$$

ג.

$$\mathrm{Im}\left[(1-i)^{1+i}\right] = \mathrm{Im}\left[e^{(1+i)\left[\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right]}\right] = \mathrm{Im}\left[e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k+i\left[\ln\sqrt{2}+-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]}\right] = e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\sin\left[\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$$

4. ניקח $z=2\pi i, w=i$, ואז $\left(e^{z}\right)^{w} = 1 \neq e^{-2\pi} = e^{zw}$

5. א. עבור הענף העיקרי של הלוגריתם

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)$$

כאשר $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$. אם נסמן $z = Re^{i\theta}$ אז כמובן $\frac{1}{z} = \frac{1}{R}e^{-i\theta}$ ולכן

$$\operatorname{Log}\frac{1}{z} = \ln|\frac{1}{z}| + i\operatorname{Arg}(\frac{1}{z}) = -\ln|z| - i\theta = -\operatorname{Log} z$$

כנדרש.

ב. אם נבחר ענף של הלוגריתם שעבורו $\arg(z) \in (0, 2\pi)$ וניקח $z = i$ אז

$$\log\frac{1}{z} = \log(-i) = i\frac{3\pi}{2}$$

ו

$$-\log z = -\log i = -i\frac{\pi}{2}$$

כך שאין שוויון.