פתרון תרגיל בית 4 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1 (חימום)**.** יהי $\sigma \in S_n$ מחזור מאורך k. מצאו את $o(\sigma)$.

פתרון. נסמן $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ ונוכיח כי $o(\sigma) = k$. קל לחשב שמתקיים

$$\sigma^k(a_0) = a_{i \bmod k}$$

(שימו לב, האינדקס הוא מודולו k כדי לאפשר לנו לעבוד בטווח $\{0, 1, \ldots, k-1\}$). ראשית, נבדוק כי $\sigma^k = \mathrm{id}$. לכל a_i מתקיים

$$\sigma^k(a_i) = \sigma^{k-1}(a_{i+1}) = \cdots = \sigma(a_{i-1}) = a_i$$

ולכל $m \neq a_i$, $\sigma^k(m) = m$ (כי $\sigma(m) = m$). נותר להוכיח מינימליות. אבל אם $j < k$, אז $\sigma^j(a_0) = a_j \neq a_0$, כלומר $\sigma^j \neq \mathrm{id}$.

שאלה 2. מצאו איבר מסדר 6 בחבורה S_5.

פתרון. האיברים מסדר 6 בחבורה S_5 הם בדיוק התמורות שניתן לרשום כמכפלה של מחזורים זרים מאורך 2 ומאורך 3. למשל התמורה $(1\ 2)(3\ 4\ 5)$.

שאלה 3. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ונגדיר את התומך של σ להיות

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש-σ "מזיזה". נאמר ששתי תמורות σ ו-τ הן זרות אם $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \varnothing$.

א. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שאינן מתחלפות.

ב. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שמתחלפות.

ג. הוכיחו שאם $i \in \mathrm{supp}(\sigma)$, אז גם $\sigma(i) \in \mathrm{supp}(\sigma)$.

ד. הוכיחו שכל זוג תמורות זרות מתחלף.

פתרון.

א. נבחר $\sigma = (1\ 2) \in S_3$ ואת $\tau = (2\ 3) \in S_3$. התמורות האלו לא זרות כי חיתוך התומכים שלהן הוא $\{2\}$. כבר חישבנו בכיתה כי

$$\sigma\tau = (1\ 2\ 3) \neq (1\ 3\ 2) = \tau\sigma$$

ב. אפשר לבחור חזקות של אותה תמורה. למשל אם $\sigma = (1\ 5\ 3)(4\ 7) \in S_7$, אז $\sigma\sigma^2 = \sigma^3 = \sigma^2\sigma$ כאשר $\sigma^2 = (1\ 3\ 5)$. חיתוך התומכים של σ ו-σ^2 הוא $\{1, 3, 5\}$, ולכן הן לא זרות.

ג. אם $i \in \operatorname{supp}(\sigma)$, אז $\sigma(i) \neq i$. נניח בשלילה כי $\sigma(i)$ לא שייך לתומך של σ. לכן $\sigma(\sigma(i)) = \sigma(i)$. מפני ש-$\sigma$ היא פונקציה הפיכה נוכל להפעיל σ^{-1} על המשוואה האחרונה ולקבל $\sigma(i) = i$, שזו סתירה.

ד. תהינה $\sigma, \tau \in S_n$ תמורות זרות ונרצה להראות $\sigma\tau = \tau\sigma$. יהי $i \in \{1, \ldots, n\}$. אם $i \notin \operatorname{supp}(\sigma)$ וגם $i \notin \operatorname{supp}(\tau)$, אז בוודאי

$$\sigma(\tau(i)) = \sigma(i) = i = \tau(i) = \tau(\sigma(i))$$

אם $i \in \operatorname{supp}(\sigma)$, אז הוא לא שייך ל-$\operatorname{supp}(\tau)$. כלומר $\tau(i) = i$, ולכן $\sigma(\tau(i)) = \sigma(i)$. לפי הסעיף הקודם גם $\sigma(i) \in \operatorname{supp}(\sigma)$ ולכן $\sigma(i)$ גם לא שייך ל-$\operatorname{supp}(\tau)$. לכן $\tau(\sigma(i)) = \sigma(i)$. באופן דומה מוכיחים את המקרה שבו $i \in \operatorname{supp}(\tau)$.
בדקנו שלכל $i \in \{1, \ldots, n\}$ מתקיים $\sigma\tau(i) = \tau\sigma(i)$ ולכן $\sigma\tau = \tau\sigma$.

שאלה 4. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את σ^2, את σ^{20} ואת $o(\sigma)$.

א. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 9 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$

ב. $\sigma = (1\;2)\,(2\;5\;4)\,(3\;1\;4)\,(1\;5) \in S_5$

פתרון.

א. מפרקים לפי הדרך שראינו בתרגול. מקבלים כי יש את המעגלים הבאים:

$$1 \mapsto 5 \mapsto 1,\; 3 \mapsto 9 \mapsto 8 \mapsto 3,\; 4 \mapsto 7 \mapsto 4$$

לכן $\sigma = (1\;5)\,(3\;9\;8)\,(4\;7)$ (כאשר 2 ו-6 נשלחים לעצמם). נחשב את σ^2 בעזרת העובדה שמחזורים זרים מתחלפים זה עם זה, ונקבל:

$$\sigma^2 = (1\;5)^2\,(3\;9\;8)^2\,(4\;7)^2 = (3\;8\;9)$$

אפשר לחשב ישירות ולראות כי $o(\sigma) = 6$, או להעזר בכך שהסדר של תמורה בהצגה כמכפלת מחזורים זרים הוא הכמ"מ של אורכי המחזורים. אצלנו $o(\sigma) = [2, 3, 2] = 6$. לכן $\sigma^6 = \mathrm{id}$. מכאן קל לחשב

$$\sigma^{20} = \left(\sigma^6\right)^3 \sigma^2 = \mathrm{id}^3 \cdot \sigma^2 = (3\;8\;9)$$

ב. נסמן את התמורה הנתונה σ. פה התמורה לא נתונה בצורה נוחה, ולכן נכתוב אותה כמטריצה כשנמצא לאן נשלח כל אחד מן המספרים $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן קל לראות שיש פה מעגל אחד, כלומר $\sigma = (1\;4\;3\;2\;5)$ היא מחזור. נחשב את σ^2:

$$\sigma^2 = (1\;4\;3\;2\;5)^2 = (1\;3\;5\;4\;2)$$

סדר של מחזור הוא אורכו, ולכן $o(\sigma) = 5$. לכן $\sigma^5 = \mathrm{id}$ ונקבל $\sigma^{20} = \left(\sigma^5\right)^4 = \mathrm{id}$.

שאלה 5. תהינה G,H חבורות. האם כל תת־חבורה K של $G\times H$ היא בהכרח מהצורה $K_1\times K_2$, כאשר K_1 תת־חבורה של G ו-K_2 תת־חבורה של H? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

פתרון. התשובה היא **לא!**

ניקח $G=H=\mathbb{Z}_2$ (אפשר לקחת כל חבורה לא טריוויאלית). כלומר $G\times H=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. נסתכל על

$$K=\langle(1,1)\rangle=\{(0,0),(1,1)\}$$

מהגדרת K (כתת־החבורה הנוצרת על ידי $(1,1)$) ברור כי $K\leq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. אבל אי אפשר להציג את K כמכפלה של תת־חבורות $K_1\times K_2$ כנ"ל. הרי אז $0,1\in K_1$ וגם $0,1\in K_2$, ומקבלים $K_1=K_2=\mathbb{Z}_2$, כלומר $K_1\times K_2=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\neq K$.

כעת נציג את **ההוכחה השגויה** הנפוצה. ההוכחה הולכת ככה: תהי $K\leq G\times H$ תת־חבורה. נגדיר

$$K_1=\{g\in G\,|\,\exists h\in H:(g,h)\in K\}$$
$$K_2=\{h\in H\,|\,\exists g\in G:(g,h)\in K\}$$

אז קל לבדוק ש-$K_1\leq G$ ו-$K_2\leq G$ (הקריטריון המקוצר, למשל). עכשיו אומרים "ברור ש-$K=K_1\times K_2$", ולכן סיימנו.

הבעיה, כמו שניחשתם, היא בזה שמה שכתוב "ברור ש-" לא ברור. למעשה, הוא לא נכון. בדוגמה הנגדית להלן, מקבלים ש-$K_1=K_2=\mathbb{Z}_2$, ואז $K_1\times K_2=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\neq K$.

שאלה 6. כתבו תוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, כלומר מקבלת את השורה השנייה בהצגת תמורה כמטריצה בגודל $2\times n$, ומדפיסה את התמורה כמכפלת מחזורים זרים.

רשות: הרחיבו את התוכנה כך שתקבל כמה תמורות, ותדפיס את מכפלתן כמכפלת מחזורים זרים. למעשה אפשר לממש מחלקה שמייצגת תמורה, עם מתודות לכפל תמורות, למעבר בין ייצוגים שונים של התמורה, לתומך וכו'.

בהצלחה!