

חדו"א 1 תרגיל מספר 4 תשפ"א - גבולות של סדרות מנוטוניות והקבוע e

ענו על השאלות הבאות:

חלק א

1. הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}$ מתכנסת.
2. יהא $0 < c < 1$. נגדיר סדרה כך: $a_1 = c$ ולכל n טבעי נגדיר $a_{n+1} = \frac{1}{2} (c + (a_n)^2)$ הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את הגבול שלה.
3. נגדיר סדרה $a_1 = 11$ ולכל n טבעי $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{30+a_n}{10+3a_n}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.
4. תהא סדרה נתונה המקיימת כי $a_1 > 0$ ולכל n טבעי מתקיים $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 10}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת ללא תלות בערכו של a_1 (כלומר לכל ערך של a_1 חיובי, הסדרה מתכנסת).
5. תהא סדרה המקיימת כי $a_1 > 0$ ולכל n טבעי מתקיים $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.
6. חשבו את הגבול של הסדרה $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.
7. חשבו את הגבול של הסדרה $\left(\frac{n+6}{n+7}\right)^{n+9}$.
8. חשבו את הגבול של הסדרה $\left(\frac{5n^3+1}{5n^3+n^2-1}\right)^{\frac{9n^3+n-3}{5n^2-2n-2}}$.
9. חשבו את הגבול של הסדרה $\frac{2^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

חלק ב

1. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל ונסמן $L = \sup A$. הוכיחו/הפריכו: קיימת סדרה מונוטונית a_n שכל איבריה ב A המתכנסת ל L .
2. קבעו האם קיים גבול לסדרה $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (n+i)}$ אם כן, מצאו אותו. (מי שלא מכיר את הסימון \prod יכול להסתכל פה)

בהצלחה! ☺