הרצאה V- אינפי 1

סדרה מונוטונית:

עולה מונוטונית הגדרה: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עולה מונוטונית אם לכל n טבעי מתקיים $x_1 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$

הסימון: $x_n \nearrow$.

יורדת מונוטונית הגדרה: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$יורדת מונוטונית אם לכל n טבעי מתקיים $x_1 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots$

הסימון: $x_n \searrow$.

דוגמא: $\frac{1}{n} \searrow$.

משפט: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נסמן $M = sup x_n, m = inf x_n$. אז: 1) אם $x_n \nearrow$ אז קיים גבול ששווה לM. 2) אם $x_n \searrow$ קיים גבול ששווה לm.

הוכחה: 1) $x_n \nearrow$. נניח שM ממשי. נקבע כי $0 < \varepsilon$. לפי התכונה 2 של sup מתקיים $\exists \bar{n}: M-\varepsilon \le x_{\bar{n}} \le M+\varepsilon$. ומכאן ניתן לקבל כי מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n \ge \bar{n}: \ x_n \in (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$. לפי ההגדרה של גבול $\lim_{n\to\infty} x_n = M$. כעת נוכיח עבור M=+∞. ע״פ הגדרה $\forall E \in R\, \exists \bar{n}: x_{\bar{n}} \ge E$. מכאן שמהמקום הזה והלאה התנאי מתקיים, ונקבל $\forall E \in R\, \exists \bar{n} \forall n \ge \bar{n}: x_n \ge E$.

עבור $x_n \searrow$ ההוכחה אנלוגית.

מסקנה: אם $x_n \nearrow$ חסומה מלעיל אז $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n = sup x_n$. אם $x_n \searrow$ חסומה מלעיל אז $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n = inf x_n$.

תרגיל: $c > 0$. מהו גבול הסדרה: $x_1 = \sqrt{c}, x_2 = \sqrt{c+\sqrt{c}}, \ldots, x_{n+1} = \sqrt{c+x_n}$?

פתרון: נניח שגבול קיים (L). ואז נקבל $x_{n+1}{}^2 = c + x_n$, נציב ונקבל משוואה ריבועית $l^2 - l - c = 0$. ואז ע״פ נוסחת שורשים נקבל כי $l_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4c}}{2}$ הגבול אינו שלילי לכן $l = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ (בהנחה שיש גבול). כדי להוכיח שיש גבול צריך להוכיח כי 1) $x_n \nearrow$ 2)וגם כי x_n חסומה מלעיל.

נוכיח (באינדוקציה) את 2) $x_1 \le l$. נניח ש$x_n \le l$. נוכיח שמתקיים לעוקבו: $x_{n+1} = \sqrt{c+x_n} \le \sqrt{c+l} \le l$. אזי לכל $\forall n: x_n \le l$ נבדוק: $x_{n+1} \ge x_n$, ז״א $\sqrt{c+x_n} \ge x_n$, נעלה בריבוע ונקבל $x_n^2 - x_n - c \le 0$ אבל ידוע כי $x_n \le l$. כלומר ואז קיים גבול שמקיים $2 = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} = \lim_{n\to\infty} x_n$ וניתן לסמן $x_n \nearrow 2$.

סכום של סדרה הנדסית: $a_1 = 1, \ldots, a_n = q^{n-1}$. אנו רוצים לחשב סכום של הסדרה הנ״ל, כאשר $|q| < 1$.

נסמן $x_n = 1 + q + \cdots q^n$. ונקבל $x_n(1-q) = x_n - qx_n = 1 - q^{n+1}$. נחלק ונקבל $X_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. וע״פ משפט שהוכחנו באחת ההרצאות הוקדמות מתקיים $\lim_{n\to\infty}|q|^n = 0$. ואז מקביל כי ע״פ אריתמטיקה של סדרות $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-q}$.

אי שיוויון ברנולי: $\forall x \in R\ x > -1: \ (1+x)^n \ge 1 + nx$.

הוכחה (באינדוקציה): עבור *n=1* נקבל ש1 ≥*1*. נניח שמתקיים $(1+x)^n \ge 1+nx$, ונוכיח עבור העוקב *n+1*. ע״פ הבינום של ניוטון ניתן לקבל $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \ge (1+nx)(1+x)$ ניתן לחלק ב*(1+x)* כי $x > -1$ והגענו להנחה. משל.

מספר של אוילר (Euler) (e): נגדיר: $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$. (אי הגדרות מסוג 1^∞).

משפט: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n := e$ קיים גבול סופי.

הוכחה: 1) נוכיח כי היא עולה מונוטונית. $x_n \ge x_{n-1}$. לכל n טבעי. מתקיים: $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} =$

$\frac{(n^2-1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = (1-\frac{1}{n^2})^n \frac{n}{n-1} \ge \left(1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)\frac{n}{n-1} = \frac{(n-1)n}{n(n-1)} = 1$. קיבלנו שהסדרה עולה מונוטונית.

2) נוכיח שx_n חסומה מלעיל. $x_n = (1+\frac{1}{n})^2 = 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}+\dots+\frac{1}{n^n} = 2+\dots+\frac{(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n})}{n!} < 2+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!} <$ $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{1}{2}(1+\dots+\frac{1}{2^{n-2}})$. $y_n := 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-2}}$. ועי"פ הנוסחה של סכום סדרה הנדסית קיבלנו כי הגבול המתקבל של y_n הוא 2. לכן $x_n = (1+\frac{1}{n})^n < 2+2\frac{1}{2} = 3$ ועי"פ אי שיוויון ברנולי קיבלנו ש$(1+\frac{1}{n})^n > 2$ ואם נגדיר את הגבול להיקרא e נקבל ש$2 \le e \le 3$. וידוע כי $e = 2.7182\dots$.

<u>גבול עליון וגבול תחתון</u>:

תהיה סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר $x_m := \{x_i : i \ge n\}$; $L_n := sup x_m$. $x_m := \{x_i : i \ge n\}$; $l_n := inf x_m$. ברור ש$l_n \le L_n$.

<u>משפט</u>: $A \subset B \subset \mathbb{R}$ אזי $supA \le supB, infA \ge infB$. הוכח בתרגיל בית ☺.

מקבלים כי $L_{n+1} = sup\{x_{n+1},\dots\} \le sup\{x_n,\dots\} = L_n$ ומכאן נובע כי $L_n \searrow$.

ושוב, $l_{n+1} = inf\{x_{n+1},\dots\} \ge inf\{x_n,\dots\} = l_n$, ומכאן נובע כי $l_n \searrow$.

אזי L_n וl_n מונוטוניות, הגבולות קיימים ושווים ל $lim_{n\to\infty} L_n = inf L_n, lim_{n\to\infty} l_n = sup l_n$.

<u>הגדרה</u>: $lim_{n\to\infty} L_n := \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} sup x_n$, וגם $lim_{n\to\infty} l_n := \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} inf x_n$.

דוגמא: $a_n = \begin{Bmatrix} 0 \,; n = 2m \\ 1 \,; n = 2m+1 \end{Bmatrix}$, ז"א הסדרה היא 1,0,1,0,1... $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1$.

<u>משפט</u>: אם גבול עליון $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = L$ אז קיים גבול לסדרה שהוא L.

הוכחה: ההוכחה פשוטה, נובעת מההגדרות הקודמות ומלמת הסנדוויץ'. $l_n \le x_n \le L_n$ ומאחר ו$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} l_n = L$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. משל.

<u>משפט</u>: אם קיים גבול $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ אזי $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = L$. (בעצם הפכנו את המשפט הקודם ל"אם ורק אם")

הוכחה: נקבע $\varepsilon > 0$. וL ממשי. אנחנו יודעים כי $\exists \bar{n} : \forall n \ge \bar{n} \; x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, ולפיכך, לכל $n \ge \bar{n}$ מתקיים עי"פ הגדרה $L-\varepsilon \le x_n \le L+\varepsilon$. ומכאן נובע כי $L-\varepsilon \le l_{\bar{n}} \le L_{\bar{n}} \le L+\varepsilon$. וקיבלנו ע כי מתקיים: $L-\varepsilon \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le L+\varepsilon$.

ואז מתקיים (עי"פ הגדרת הסביבה) $0 \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le 2\varepsilon$. בהכרח ש$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0$, ואז הוכחנו את הדרוש. משל.