

הרצאה V - אינפי 1

סדרה מונוטונית:

עולה מונוטונית הגדרה: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עולה מונוטונית אם לכל n טבעי מתקיים $\dots \geq x_{n+1} \geq x_n \geq \dots \geq x_1$

הסימון: $x_n \nearrow$

יורדת מונוטונית הגדרה: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת מונוטונית אם לכל n טבעי מתקיים $\dots \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \dots \leq x_1$

הסימון: $x_n \searrow$

דוגמא: $\searrow \frac{1}{n}$

משפט: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נסמן $m = \inf x_n, M = \sup x_n$. אז (1) אם $x_n \nearrow$ אז קיים גבול שווה למ. (2) אם $x_n \searrow$ קיים גבול שווה למ.

הוכחה: (1) $x_n \nearrow$. נניח M ממשי. נקבע כי $\varepsilon > 0$. לפי התכונה 2 של \sup מתקיים $\exists \bar{n} : M - \varepsilon \leq x_{\bar{n}} \leq M + \varepsilon$. ומכאן ניתן לקבל כי מתקיים $(M - \varepsilon, M + \varepsilon) : x_n \in$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : x_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. לפי ההגדרה של גבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$. כעת נוכיח עבור $M = +\infty$. ע"פ הגדרה $\exists \bar{n} : x_{\bar{n}} \geq E$. $\forall E \in \mathbb{R} \exists \bar{n} : x_{\bar{n}} \geq E$. מכאן שמהמקום הזה והלאה התנאי מתקיים, ונקבל $\forall E \in \mathbb{R} \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : x_n \geq E$. עבור $x_n \searrow$ ההוכחה אנלוגית.

מסקנה: אם $x_n \nearrow$ חסומה מלעיל אז $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup x_n$. אם $x_n \searrow$ חסומה מלרע אז $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf x_n$.

תרגיל: $c > 0$. מהו גבול הסדרה: $x_1 = \sqrt{c}, x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \dots, x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$

פתרון: נניח שגבול קיים (L). ואז נקבל $x_{n+1}^2 = c + x_n$, נציב ונקבל משוואה ריבועית $l^2 - l - c = 0$. ואז ע"פ נוסחת שורשים נקבל כי $l_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$ הגבול אינו שלילי לכן $l = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}$ (בהנחה שיש גבול). כדי להוכיח שיש גבול צריך להוכיח כי $x_n \nearrow$ (2) וגם כי חסומה מלעיל.

נוכיח (באינדוקציה) את 2) $x_1 \leq l$. נניח $x_n \leq l$. נוכיח שמתקיים לעוקבו: $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n} \leq \sqrt{c + l} \leq l$. אזי לכל n $x_n \leq l$. נבדוק: $x_{n+1} \geq x_n$ ז"א $\sqrt{c + x_n} \geq x_n$, נעלה בריבוע ונקבל $x_n^2 - x_n - c \leq 0$. כלומר ואז קיים גבול שמקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2} = 2$ וניתן לסמן 2 $x_n \nearrow$.

סכום של סדרה הנדסית: $a_1 = 1, \dots, a_n = q^{n-1}$. אנו רוצים לחשב סכום של הסדרה הנ"ל, כאשר $|q| < 1$.

נסמן $x_n = 1 + q + \dots + q^n$. ונקבל $x_n(1 - q) = x_n - qx_n = 1 - q^{n+1}$. נחלק ונקבל $X_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. וע"פ משפט שהוכחנו באחת

ההרצאות הוקדמות מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$. ואז מקביל כי ע"פ אריתמטיקה של סדרות $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \frac{1}{1 - q}$.

אי שיויון ברנולי: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$: $\forall x \in \mathbb{R} x > -1$.

הוכחה (באינדוקציה): עבור $n=1$ נקבל ש $1 \geq 1$. נניח שמתקיים $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, ונוכיח עבור העוקב $n+1$. ע"פ הבינום של ניוטון ניתן לקבל $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x)$ כי $x > -1$ והגענו להנחה. משל.

מספר של אוילר (Euler) (e): נגדיר: $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. (אי הגדרות מסוג 1^∞).

משפט: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ קיים גבול סופי.

הוכחה: (1) נוכיח כי היא עולה מונוטונית. $x_n \geq x_{n-1}$. לכל n טבעי. מתקיים: $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n+1)^n (n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} =$

$\frac{(n^2-1)n}{n^{2n(n-1)}} = (1 - \frac{1}{n^2})^n \frac{n}{n-1} \geq (1 + n(-\frac{1}{n^2})) \frac{n}{n-1} = \frac{(n-1)n}{n(n-1)} = 1$. קיבלנו שהסדרה עולה מונוטונית.

(2) נוכיח ש- x_n חסומה מלעיל. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^2 = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} + \dots + \frac{1}{n^n} = 2 + \dots + \frac{(1-\frac{1}{n}) \dots (1-\frac{n-1}{n})}{n!} < 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} = 2 + \frac{1}{2}(1 + \dots + \frac{1}{2^{n-2}})$ הגבול המתקבל של y_n הוא 2. לכן $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n < 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$ ואם נגדיר את הגבול להיקרא e נקבל ש- $2 \leq e \leq 3$ וידוע כי $e = 2.7182 \dots$
גבול עליון וגבול תחתון:

תהיה סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר $x_m := \{x_i : i \geq m\}$. $L_n := \sup x_m$; $x_m := \{x_i : i \geq m\}$. ברור ש- $l_n \leq L_n$.
משפט: $A \subset B \subset \mathbb{R}$ אזי $\sup A \leq \sup B$, $\inf A \geq \inf B$. הוכח בתרגיל בית ☺.

מקבלים כי $L_{n+1} = \sup\{x_{n+1}, \dots\} \leq \sup\{x_n, \dots\} = L_n$ ומכאן נובע כי $L_n \searrow$ ושוב, $l_{n+1} = \inf\{x_{n+1}, \dots\} \geq \inf\{x_n, \dots\} = l_n$, ומכאן נובע כי $l_n \nearrow$.

אזי L_n ו- l_n מונוטוניות, הגבולות קיימים ושווים ל- $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \inf L_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \sup l_n$.
הגדרה: $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n$ וגם $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n$.

דוגמא: $a_n = \begin{cases} 0 & ; n = 2m \\ 1 & ; n = 2m + 1 \end{cases}$ ז"א הסדרה היא $\dots, 1, 0, 1, 0, 1$. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

משפט: אם גבול עליון $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ אז קיים גבול לסדרה שהוא L .

הוכחה: ההוכחה פשוטה, נובעת מההגדרות הקודמות ומלמת הסנדוויץ'. $l_n \leq x_n \leq L_n$ ומאחר ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$ מתקיים כי $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$. משל.

משפט: אם קיים גבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ אזי $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$. (בעצם הפכנו את המשפט הקודם ל"אם ורק אם")

הוכחה: נקבע $\varepsilon > 0$ ו- $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ יודעים כי $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, ולפיכך, לכל $n \geq \bar{n}$ מתקיים ע"פ הגדרה $L - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq L + \varepsilon$. ומכאן נובע כי $L - \varepsilon \leq l_n \leq L_n \leq L + \varepsilon$ וקיבלנו ע"פ מתקיים: $L - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq L + \varepsilon$.
 ואז מתקיים (ע"פ הגדרת הסביבה) $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 2\varepsilon$. בהכרח ש- $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ואז הוכחנו את הדרוש. משל.