הרצאה 16

פונקציה סתומה Implicit Function

$$ax + by = 0$$
$$F(x,y) \coloneqq ax + by = 0$$
$$y = -\frac{a}{b}x =: \varphi(x) \quad ; \quad b \neq 0$$
$$ax = 0 \quad ; \quad b = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = b$$

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

סימון

נסמן:

$$\underset{(x,y)\in}{\mathbb{R}^{n+1}} = \underset{x\in}{\mathbb{R}^n} \times \underset{y\in}{\mathbb{R}}$$

משפט

תהי $\mathbb{W} \subset_\circ \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. נתונה $F: \mathbb{W} \to \mathbb{R}\,; F \in C^r(\mathbb{W})$

נתונה הנקודה $(a,b) \in W$ כך ש $F(a,b) = 0$

נניח $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$

אזי קיימות סביבות ב$a \in U, b \in V$ כך ש

$$\forall x \in U \quad \overset{\text{קיים ויחיד}}{\exists!} \quad y \in V \;\; \mathrm{F}(x,y) = 0$$

נסמן $\varphi: U \to V \quad y = \varphi(x)$ ו$\varphi \in C^r(U)$

הוכחה

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0 \quad ; \quad WLOG \;\; \frac{\partial F}{\partial y} > 0$$

$\frac{\partial F}{\partial y}$ – רציפה ב(a,b) ולכן

$$\exists B_{(a,b)}(\epsilon): \forall (x,y) \in B_{(a,b)}(\epsilon) \;\; \frac{\partial F}{\partial b}(x,y) > 0$$

סביבות $\exists U' \ni a, V' \ni b$ כך ש$U' \times V' \subset B_{(a,b)}(\epsilon)$

בפרט $\frac{\partial F}{\partial y}(a,y) > 0$ כלומר $F(a,y) \nearrow$ ממש (לפי y).

$$V' = (b - \epsilon, b + \epsilon)$$
$$y = b : F(a,b) = 0$$
$$y = b + \epsilon : F(a, b + \epsilon) > 0$$
$$y = b - \epsilon : F(a, b - \epsilon) < 0$$

$F(x,b+\epsilon)$ רציפה ולכן $\exists U'' \ni a:\ F(x,b+\epsilon)>0\ \forall x\in U''$

$F(x,b-\epsilon)$ רציפה ולכן $\exists U''' \ni a:\ F(x,b-\epsilon)<0\ \forall x\in U'''$

נגדיר

$$U \coloneqq U' \cap U'' \cap U'''$$

נקבע $x\in U$

לפי הבניה $F(x,b-\epsilon)<0\ ,F(x,b+\epsilon)>0$

$F(x,y)$ – רציפה לפי y אם x קבוע.

$F(x,b-\epsilon)<0, F(x,b+\epsilon>0)$ ולכן לפי משפט קושי על ערך בינוני $\exists y: F(x,y)=0$

אבל $F(x,*)\nearrow$ ולכן y הוא יחיד.

$$y\in(b-\epsilon,b+\epsilon)=V\ \ ;\ \ y=\varphi(x), x\in U$$

1) צ"ל φ רציפה בנקודה (a,b), כלומר צ"ל:

$$\forall\epsilon>0\exists\delta>0\ \forall x\in B(a,\delta)\subset U: \varphi(x)\in(b-\epsilon,b+\epsilon)$$

ניקח $U\times(b-\epsilon,b+\epsilon)$ ולפי הבנייה $\exists U'\subset U$

$$\begin{aligned}&x\in U'\Rightarrow y\in(b-\epsilon,b+\epsilon)\\&U'=B(a,\delta)\\&y=\varphi(x)\\&\forall x\in B(a,\delta)\Rightarrow\varphi(x)\in(\varphi(a)-\epsilon,\varphi(a)+\epsilon)\end{aligned}$$

ולכן φ רציפה.

2) $\varphi\in C^r(U)$

נכתוב נוסחת טיילור לF בנקודה $(\mathrm{a,b})$ עם סדר 0 עם שארית $Lagrange$.

$$F(x_1,\dots,x_n,y)=F(a,b)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j-a_j)+\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(y-b)$$

עבור $0<\theta<1\ \ ;\ \ \xi=(a.b)+\theta\big((x,y)-(a,b)\big)$

$$\begin{aligned}&y=\varphi(x);\quad b=\varphi(a)\\&F(a,b)=0\\&x\in U\ni a\,; F\big(x,\varphi(x)\big)=0\end{aligned}$$

$$0=0+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j-a_j)+\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)\big(\varphi(x)-\varphi(a)\big)$$

$$x=(a_1,a_2,\dots,x_k,a_{k+1},\dots a_n)$$

$$0=\frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)(x_k-a_k)+\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)\big(\varphi(a_1,\dots,x_k,\dots,a_n)-\varphi(a)\big)$$

$$\frac{\varphi(a_1,\dots,x_k,\dots,a_n)-\varphi(a_1,\dots,a_n)}{x_k-a_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq0\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}(x),\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)\neq0\ \ \forall\big||x-a|\big|<\delta$$

$$x\to a\Rightarrow\varphi(x)\to b=\varphi(a)$$

$$\left(x,\varphi(x)\right)-(a,b)\xrightarrow[x\to a]{}0$$

ולכן $\xi\xrightarrow[x\to a]{}(a,b)$

$$\frac{\varphi(a_1,\dots,x_k,\dots,a_n)-\varphi(a_1,\dots,a_n)}{x_k-a_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\left(a+\theta(x-a),b+\theta(\varphi(x)-b)\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(a+\theta(x-a),b+\theta(\varphi(x)-b)\right)}$$

$$\lim_{x_k\to a_k}\frac{\varphi(a_1,\dots,x_k,\dots,a_n)-\varphi(a_1,\dots,a_n)}{x_k-a_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$$

$$\exists\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(a)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0\ \forall x\in U_a,y\in V_b$$

אז לכן אפשר להחליף (a,b) ל־$\left(x,\varphi(x)\right)$

ולכן

$$\boxed{\begin{matrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\left(x,\varphi(x)\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\varphi(x)\right)}\\ x\in U_a\end{matrix}}_{k=1,\dots,n}$$

$$\varphi\in C^r(U)?$$

$\varphi,\frac{\partial F}{\partial x_j}$ רציפות ולכן $-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\left(x,\varphi(x)\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\varphi(x)\right)}$ רציפה ב־U

ולכן $x\in U,k=1,\dots,n\ ;$ $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)$ רציפות ולכן $\varphi\in C^1(U)$

נניח כי $\varphi\in C^k(U)\ :\ k<r$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k},\frac{\partial F}{\partial y},\varphi\in C^k(U)\Rightarrow-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\left(x,\varphi(x)\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\varphi(x)\right)}\in C^k(U)$$

ולכן

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\in C^k(U)\ \ k=1,..,n\Rightarrow\varphi\in C^{k+1}(U)$$

ולכן לפי אינדוקציה $\varphi\in C^r(U)$

גזירות של פונקציה סתומה

$$F\left(x_1,\dots,x_n,\varphi(x_1,\dots,x_n)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}:\quad\frac{\partial F}{\partial x_k}\left(x,\varphi(x)\right)+\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\varphi(x)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)=0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\big(x,\varphi(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)}$$

$$F(x_1, .., x_n, y) = 0$$

אלגוריתם:

1) $F(a,b) = 0$

2) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$y = \varphi(x), x \in U_a$$

תרגיל

$$z^3 - xz + y = 0$$

1) $x = 3, y = -2, z = z(x,y)$

2) $\frac{\partial z}{\partial x}(3,-2) =?$

1) $F(x,y,z) = z^3 - xz + y = 0$

$$F(3,-2,2) = 8 - 6 - 2 = 0$$

2) $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - x\Big|_{\substack{x-3\\ y=-2\\ z=2}} = 3 * 4 - 3 = 9 \neq 0$

ולכן קיימת פונקציה יחידה $z = z(x,y) \in C^\infty(U \times V)$

$$(3,-2) \in U\ ; v = (2-\epsilon, 2+\epsilon)\ ;\ z(3,-2) = 2$$

$$z(x,y)^3 - xz(x,y) + y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}:\ 3z^2 z'_x - z - xz'_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: 3z^2 z'_y - xz'_y + 1 = 0$$

$$3 * 4 * z'_x(3,-2) - 2 - 3z'_x(3,-2) = 0 \Rightarrow z'_x(3,-2) = \frac{2}{9}$$

$$3 * 4 * z'_y(3,-2) - 3z'_y(3,-2) + 1 = 0 \Rightarrow z'_y(3,-2) = -\frac{1}{9}$$