

תירגול 6 - סדרות וטורי פונקציות

4 במאי 2014

הגדרה: תהא $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות המוגדרות בתחום $B \subseteq \mathbb{R}$. יהא $x_0 \in B$ אזי $\{f_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ היא סידרה של נקודות. אם קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ נסמנו $f(x_0)$. תהא A קבוצת כל הנקודות שסדרת הפונקציות מתכנסת בהם. נקראת תחום ההתכנסות של הסדרה. בנוסף נסמן $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ $\forall x \in A$.

$f(x)$ נקראת פונקציית הגבול.

דוגמא: $f_n(x) = x^n$ בקטע $[-1, 1]$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \text{undefined} & x = -1 \end{cases} \text{ אזי}$$

הגדרה: תהא $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות המוגדרות בתחום $B \subseteq \mathbb{R}$. נגדיר את

סדרת הסכומים החלקיים שלה (ס"ח) $\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ המוגדרת $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. את

פונקציות הגבול נסמן $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

דוגמא: $f_n(x) = x^n$ בקטע $[-1, 1]$ אזי

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ \infty & x = 1 \\ \text{undefined} & x = -1 \end{cases}$$

התכנסות במ"ש

הגדרה: תהא $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות עם תחום התכנסות A ופונקציית גבול $f(x)$. נאמר שההתכנסות היא במידה שווה אם

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

דוגמא: $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ בכל הישר מתכנסת ל $f(x) = 0$. טענה: ההתכנסות במ"ש : הוכחה- עבור $\epsilon > 0$ נבחר $\frac{1}{\epsilon} > n_0$ ואז לכל $n > n_0$ ו- x ממשי מתקיים

$$\frac{1}{x^2+n} < \frac{1}{x^2+n_0} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

דוגמא: $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ בקטע $[0, 1]$ מתכנסת ל $f(x) = 0$ אבל ההתכנסות אינה במ"ש כי עבור $\epsilon = \frac{1}{4}$ (למשל) לכל n נוכל לקחת $x = 2^{-\frac{1}{n}}$

$$f_n(x) = \frac{1}{4} \not\leq \epsilon$$

הגדרה (בטורים): תהא $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות עם ס"ח $\{S_n(x)\}$ שלה תחום התכנסות A ופונקצית גבול $S(x)$. נאמר שההתכנסות היא במידה שווה אם

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, x \in A : |S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \epsilon$$

משפט (מבחן M של וירשטרס): אם קיימת סדרת מספרים $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ כך ש $|f_k(x)| \leq a_k$ (לכל $x \in A$) וגם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במ"ש ב A .

דוגמא: הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^n(x)}{n^2}$ מתכנס במ"ש בקטע $[-1, 32]$ כי מתקיים שם $\left| \frac{\sin^n(x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ וטור המספרים $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ מתכנס.

קריטריון נוסף להתכנסות במ"ש ("lim-sup"):

תהא $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות עם תחום התכנסות A ופונקצית גבול $f(x)$ אזי ההתכנסות במ"ש $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x; & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ n^2 (\frac{2}{n} - x); & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0; & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

האם: $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x; & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ n^2 (\frac{2}{n} - x); & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0; & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$ מתכנסות במ"ש?

פתרון: ברור שפונקצית הגבול היא $f(x) = 0$. ההתכנסות אינה במש כי

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| > \sup_{x \in [0,1]} |f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = n \rightarrow \infty$$

תרגיל: האם סדרת הפונקציות $f_k(x) = \frac{kx}{1+x^2k^2}$ מתכנסת במ"ש ב $[0, 1]$? פתרון: נתחיל עם התכנסות: יהא x בקטע אזי $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kx}{1+x^2k^2} = 0$. האם ההתכנסות במ"ש?

$$\text{נבדוק } \sup_{x \in [0,1]} \frac{kx}{1+x^2k^2} \text{ ע"י גזירה שלה והשוואה ל-0}$$

$$f'_k(x) = \frac{k(1+x^2k^2) - 2xk^2 \cdot kx}{(1+xk^2)^2} = 0$$

ומכאן ש $k^3 x^2 = k$ ולכן $x = \frac{1}{k}$. נבדוק אם מני' או מקס' $\frac{1}{k} < \frac{1}{k}$, $f_k(0) = 0, f_k(1) = \frac{k}{1+k^2}$ ולכן זה מקס' שערכו $f_k(\frac{1}{k}) = \frac{1}{2}$, כעת,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0$$

ולכן ההתכנסות אינה במ"ש

תרגיל: האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{n}$ מתכנסת במ"ש ב $[-1, 3]$?

פתרון: מבחן M נכשל פה כי $|\frac{(-1)^n x^2}{n}| \leq \frac{9}{n}$ שלא טור מתכנס אבל כיוון שזה טור מחליף סימן אנו יודעים לפי לייבניץ' כי הטור מתכנס לכל x בתחום. כעת נסמן את פונקציית הגבול ב $S(x)$ ואז (כיוון שממשפט לייבניץ' גם מתקיים כי

$$|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq |a_{n+1}|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |S(x) - S_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^2}{n+1} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n+1} = 0$$

כלומר ההתכנסות במ"ש.

משפט: תהא $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות רציפות המתכנסת בקטע $[a, b]$ המתכנסת במ"ש ל $f(x)$. אזי גם רציפה.

דוגמא: $f_n(x) = x^n$ בקטע $[0, 1]$ אינה מתכנסת במ"ש ל $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ כי

$f(x)$ אינה רציפה

דוגמא: $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^k(x)}{k^2}$ רציפה! כי $S_k(x)$ מתכנסת במ"ש אלה (וירשטרס)

הערה: $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ בקטע $[0, 1]$ אינה מתכנסת במ"ש (למרות שפונקציית הגבול $f(x) = 0$ רציפה.

משפט: (מבחן דריכלה)

אם בקטע I

$$1. \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \text{ חסומה באופן אחיד } |S_n(x)| < M \text{ לכל } n \text{ טבעי לכל } x \in I$$

$$2. \quad \{b_n(x)\} \text{ סדרה מונוטונית } b_n(x) \leq b_{n+1}(x) \text{ לכל } n \text{ טבעי לכל } x \in I \text{ או להיפך) מתכנסת במ"ש ל-} 0$$

אז

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \text{ מתכנס במ"ש}$$

$$\text{דוגמא: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{x+k}} \text{ מתכנס במ"ש בקטע } [1, 100] \text{ כי:}$$

$$1. \quad b_k(x) = \frac{1}{\sqrt{x+k}} \text{ מונוטונית מתכנסת במ"ש ל-} 0$$

$$2. \quad \sum_{k=1}^n \sin(kx) \text{ נראה כי חסומה באופן אחיד: עבור } x = 2\pi l \text{ הסכום הוא } 0 \text{ עבור } x \text{ אחר:}$$

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{ix} \cdot \frac{e^{ix(n+1)} - 1}{e^{ix} - 1} - e^{-ix} \cdot \frac{e^{-ix(n+1)} - 1}{e^{-ix} - 1} \right) =$$

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{e^{ix}(e^{ix(n+1)} - 1)(e^{-ix} - 1) - e^{-ix} \cdot (e^{-ix(n+1)} - 1)(e^{ix} - 1)}{|e^{ix} - 1|^2} \right)$$

$$M = \min_{x \in [1, 100]} |e^{ix} - 1|^2 \text{ כאשר } \left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{M} \text{ ולכן}$$

משפט: תהא סידרה של פונקציות רציפות המתכנסת בקטע $[a, b]$ המתכנסת ל- $f(x)$ רציפה.

אם $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ (או $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$) לכל $x \in [a, b], n \in \mathbb{N}$ אז ההתכנסות במ"ש

דוגמא $f_n(x) = |x|^n$ בקטע $[-1/2, 1/2]$ מתכנסת במ"ש ל $f(x) = 0$ מסקנה: תהא סידרה של פונקציות רציפות אי-שליליות שסס"ח שלהם מתכנסת בקטע $[a, b]$ ל $S(x)$ רציפה אזי ההתכנסות במ"ש

אינטגרציה איבר איבר

משפט: תהא סידרה של פונקציות רציפות אם הסס"ח $\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת בקטע $[a, b]$ במ"ש ל $S(x)$. אזי

1. $S(x)$ אינטגראבילית בקטע $[a, b]$

2. מתקיים

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x) dx \right)$$

$$\left(\int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx \right) \text{ כלומר}$$

$$\text{תרגיל: חשב את } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 3^k}$$

פתרון: נרצה להתסכל בטור $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ולהציב $x = 1/3$. מתקיים,

$$\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1} dt$$

בנוסף הטור $\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} = \frac{1}{1-t}$ מתכנס לכל $|t| < 1$ ובנוסף מתכנס במ"ש בכל קטע $[-c, c]$

כאשר $0 < c < 1$ (לפי מבחן M)

לכן ניתן לבצע אינט' איבר איבר ולקבל

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = S(x)$$

מכיוון ש

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln|1-t| \Big|_0^x = -\ln|1-x|$$

נקבל כי הפתרון לתרגיל

$$S(1/3) = -\ln(2/3) = \ln(3/2)$$

גזירה איבר איבר

משפט: תהא $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות גזירות ברציפות. אם

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ מתכנס בנקודה כלשהיא ב- } [a, b]$$

$$2. \text{ טור הנגזרות } \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) \text{ מתכנס במ"ש}$$

אז

$$1. S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ מתכנס במ"ש ב- } [a, b]$$

$$2. S(x) \text{ גזירה ומתקיים}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

$$(S'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) \text{ (כלומר)}$$

תרגיל: מצא תחום התכנסות, רציפות של $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \arctan(\frac{x}{n^2})$ ומצא את הנגזרת שלה

(אם קיימת)

פתרון: עבור $x > 0$ זהו טור חיובי. כיוון ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\frac{x}{n^2})}{x/n^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(y)}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1+y^2} = 1$$

(המעבר נכון בגלל שיש התכנסות בצד ימין של המשוואה), נוכל להשוואת אותו עם הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{n^2} = x \cdot \frac{\pi^2}{6} \text{ שמתכנס.}$$

$$\text{עבור } x < 0 \text{ זהו טור שלילי שניתן להשוואת שוב עם } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$$

לכן תחום ההתכנסות הוא כל הממשיים.

רציפות: נתחיל עם $x_0 > 0$:

$$\text{כיוון ש } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\frac{x_0}{n^2})}{x_0/n^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(y)}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1+y^2} = 1$$

$$\arctan(\frac{x_0}{n^2}) < 2 \frac{x_0}{n^2}$$

כיוון ש \arctan פונקציה עולה אזי נקבל כי לכל $0 \leq x \leq x_0$ יתקיים $\arctan(\frac{x}{n^2}) \leq$

$$\arctan(\frac{x}{n^2}) < 2 \frac{x_0}{n^2}$$

כיוון ש \arctan פונקציה אי זוגית נקבל כי לכל $|x| \leq x_0$ יתקיים $|\arctan(\frac{x}{n^2})| < 2\frac{x_0}{n^2}$
 ולכן בזנב הטור מתקיים לכל $|x| \leq x_0$

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x_0}{n^2}$$

ולכן ההתכנסות במ"ש בקטע $[-x_0, x_0]$ לפי מבחן M של וירשטרס (תחילת הטור לא תשנה).
 כיוון שלכל n הפונקציה $\arctan(\frac{x}{n^2})$ רציפה נקבל כי פונקצית הגבול בקטע $[-x_0, x_0]$ רציפה.
 כיוון שלכל x ממשי הוא נמצא באיזה שהוא קטע $[-x_0, x_0]$ אז הרציפות היא בכל הממשיים.

גזירות:

נרצה להשתמש בגזירה איבר איבר: לכל n מתקיים

$$\left[\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \right]' = \frac{1}{1 + x^2/n^4} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2 + x^2/n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

ולכן טור הנגזרות מתכנס במ"ש (שוב, לפי מבחן M של וירשטרס).

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2/n^2}$$

לפי משפט גזירה איבר איבר מתקיים