אינפי 4 : תרגול 10

7 יוני 2016

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני באמצעות משפט סטוקס

הקדמה: נניח ש־M הוא משטח אוריינטבילי ב־ $\mathbb{R}^3$ עם שפה $\Gamma = \partial M$ סגורה. נניח ש־n הוא נורמל יחידה רציף על M ו־

$$\gamma : [a,b] \to \Gamma$$

היא פרמטריזציה חלקה ופשוטה המכוונת את Γ בכיוון החיובי ביחס לנורמל n.
אז ממשפט סטוקס אנו יודעים שלכל שדה וקטורי $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ שגזיר ברציפות בסביבה של המשטח M מתקיים

$$\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int\int_M (\nabla \times F) \cdot n dS.$$

לכן, אם M' הוא משטח אוריינטבילי כלשהו כך ש־ $\partial M' = \Gamma' = \Gamma$ (כלומר השפה של M' שווה לשפה של M) ואם n' הוא נורמל יחידה רציף על M' המכוון בכיוון החיובי ביחס לפרמטריזציה γ, אז שוב ממשפט סטוקס נקבל

$$\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int\int_{M'} (\nabla \times F) \cdot n' dS.$$

לכן נקבל ש־

$$\int\int_M (\nabla \times F) \cdot n dS = \int\int_{M'} (\nabla \times F) \cdot n' dS,$$

כלומר ניתן להחליף את האינטגרציה מ־M ל־M'.

דוגמא: חשבו את האינטגרל $\int\int_M (\nabla \times F) \cdot n dS$ כאשר M הוא חצי האליפסואיד

$$M = \{(x,y,z) : 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36, z \geq 0\},$$

n הוא נורמל יחידה חיצוני ו־F נתונה לפי

$$F(x,y,z) = \left(\cos x \sin z + x^2 y^3, x^3, e^{x^2+z^2} - e^{y^2+z^2} + \sin(xy)\right).$$

<u>פתרון</u>: אם $G=\nabla\times F$ אז ע"י חישוב ישיר ניתן להראות ש־

$$G=\left(-2ye^{y^2+z^2}+x\cos(xy),\cos x\cos z-2xe^{x^2+z^2}-y\cos(xy),3x^2-3y^2x^2\right).$$

כמו כן, מהנתון על M ש־$z\geq 0$ נובע של־M יש את הפרמטריזציה

$$\phi(x,y)=\left(x,y,z(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\right),\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1$$

לכן הנורמל n נתון לפי

$$n=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & z_x\\ 0 & 1 & z_y\end{vmatrix}=(-z_x,-z_y,1)=\left(\frac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}},\frac{y}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}},1\right)$$

וזהו אכן נורמל חיצוני כי רכיב ה־z חיובי. כעת אם נציב את הזהויות שקיבלנו באינטגרל המשטחי נקבל אינטגרל בלתי פתיר. גם אם ננסה לחשב את האינטגרל לפי משפט סטוקס ע"י מעבר לאינטגרל קווי מסוג שני על השפה של M:

$$\partial M=\gamma=\{(2\cos t,3\sin t,0):t\in[-\pi,\pi)\}$$

נקבל את האינטגרל

$$\int_\gamma F_1dx+F_2dy+F_3dz=\int_{-\pi}^{\pi}\left(108\cos^2(t)\sin^3(t)\,(2\cos t)'+8\cos^3(t)\,(3\sin t)'\right)dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(24\cos^4(t)-216\cos^2(t)\sin^4(t)\right)dt$$

שדי קשה לחישוב. מצד שני, מההסבר הקודם אנו יודעים שאת האינטגרל המשטחי על M ניתן להחליף לאינטגרל המשטחי על

$$M'=\{(x,y,z):9x^2+4y^2\leq 36,z=0\}$$

עם הנורמל המתאים $n'=(0,0,1)$. לכן נקבל ש־

$$\int\int_M(\nabla\times F)\cdot ndS=\int\int_{M'}(\nabla\times F)\cdot n'dS$$

$$=\int\int_{M'}G\cdot n'dS=3\int_{9x^2+4y^2\leq 36}(x^2-x^2y^2)dxdy.$$

לאחר החלפת המשתנים

$$x = 2r\cos\theta, y = 3r\sin\theta, dxdy = 6rd\theta dr$$

נקבל

$$\int\int_M (\nabla\times F)\cdot ndS = 18\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(4r^2\cos^2\theta - 36r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\right) rd\theta dr$$

$$= 18\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(4r^2\cos^2\theta - 9r^4(\sin(2\theta))^2\right) rd\theta dr$$

$$= 18\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(2r^2(1+\cos(2\theta)) - \frac{9r^4}{2}(1-\cos(4\theta))\right) rd\theta dr$$

$$= 36\pi\int_0^1\left(2r^2 - \frac{9r^4}{2}\right) rdr = 36\pi\int_0^1\left(2r^3 - \frac{9r^5}{2}\right) dr$$

$$36\pi\left(\frac{r^4}{2} - \frac{3r^6}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} = -9\pi.$$

<u>דוגמא</u>: יהי M הטטרהדרון התחום ע"י המישורים $x=0, y=0, z=0$ ו־ $x+2y+3z=1$ אך ללא התחתית, כלומר ללא הנקודות מהצורה $(x,y,0)$. תהי $F(x,y,z)=(xy,yz,xz)$, חשבו את האינטגרל $\int\int_M (\nabla\times F)\cdot ndS$ כאשר n הוא נורמל יחידה חיצוני.

<u>פתרון</u>: נחשב את האינטגרל המשטחי על הבסיס של הטטרהדרון במקום על החלק העליון שלו. לבסיס M' יש את הפרמטריזציה

$$M' = \{(x,y,0) : x+2y\le 1, x,y\ge 0\}.$$

קל לבדוק שהנורמל n' של M', המתאים לנורמל החיצוני n של M, הוא $n'=(0,0,1)$. כמו כן

$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = (-y,-z,-x).$$

לכן

$$\int\int_M (\nabla\times F)\cdot ndS = \int\int_{M'} (\nabla\times F)\cdot n'dS$$

$$= -\int_{x+2y\le 1, x,y\ge 0} xdxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} xdydx = \int_0^1 x\cdot y\Big|_{y=0}^{\frac{1-x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12}.$$

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני ע"י פתרון המשוואה $\nabla\times G = F$

הקדמה: לפעמים נרצה לחשב אינטגרליים משטחיים מסוג שני כלליים

$$\int\int_M F\cdot ndS$$

ע"י משפט סטוקס. כדי להשתמש במשפט סטוקס אנו חייבים למצוא שדה וקטורי G המקיים $\nabla\times G = F$. לכן ננסח את המשפט הבא הנותן תנאי הכרחי ומספיק על השדה הוקטורי F לקיום שדה וקטורי G המקיים את הנ"ל.

משפט: יהי $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שדה וקטורי שגזיר ברציפות. אז קיים שדה וקטורי $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שגזיר פעמיים ברציפות ומקיים $\nabla\times G = F$ אם ורק אם $\mathrm{div}F(x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}^3$. במקרה זה ניתן לבחור את השדה G להיות $G=(0,G_2,G_3)$ כאשר

$$G_2(x,y,z) = \int^x F_3(t,y,z)dx,$$

$$G_3(x,y,z) = \int^y F_1(0,t,z)dy - \int^x F_2(t,y,z)dx.$$

דוגמא: יהי M המשטח הנתון לפי

$$\{(x,y,z): z = x^2+y^2, 0\le z\le 1\}\cup\{(x,y,z): x^2+y^2=1, 1\le z\le 3\}.$$

חשבו את האינטגרל $\int\int_M F\cdot nds$ כאשר n הוא נורמל יחידה חיצוני ו־ $F(x,y,z) = (x+z^2, 0, -z-3)$.

פתרון: כיוון ש־

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial(x+z^2)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(-z-3)}{\partial z} = 1-1=0$$

נובע שקיים שדה וקטורי G המקיים $\nabla \times G = F$. לפי המשפט ל־G יש את הצורה $G = (0, G_2, G_3)$ כאשר

$$G_2 = \int^x (-z-3)dt = -(z+3)x,$$

$$G_3 = \int^y (0+z^2)dt - \int^x 0dt = z^2 y.$$

כמו כן לשפה של המשטח M יש את הפרמטריזציה (החיובית ביחס לנורמל n)

$$\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, 3), t \in [-\pi, \pi).$$

לכן ממשפט סטוקס נקבל

$$\int\int_M F \cdot ndS = \int\int_M (\nabla \times G) \cdot ndS = \int_\gamma G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz$$

$$= \int_\gamma -(z+3)\,xdy + z^2 ydz = \int_{-\pi}^{\pi} -6\cos(t)(-\sin(t))' dt$$

$$= 6\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = 3\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(2t))dt = 6\pi.$$

<u>דוגמא</u>: חשבו את האינטגרל $\int\int_M F \cdot ndS$ כאשר

$$M = \{(x,y,z) : y^2 = 4(x^2+z^2), 2 \le y \le 4\},$$

n הוא נורמל חיצוני ל־M ו־$F(x,y,z) = (x, -2y, z)$.

<u>פתרון</u>: כיוון ש־

$$\mathrm{div} F = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(-2y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 - 2 + 1 = 0$$

נובע שקיים שדה וקטורי G המקיים $\nabla \times G = F$. לפי המשפט ל־G יש את הצורה $G = (0, G_2, G_3)$ כאשר

$$G_2 = \int^x zdt = zx,$$

$$G_3 = \int^y 0dt - \int^x (-2y)dt = 2xy.$$

כעת לשפה של G יש את הפרמטריזציה, המכוונת את השפה בכיוון החיובי ביחס לנורמל החיצוני, הנתונה לפי

$$\gamma(t) = \{(\cos t, 2, -\sin t) : t \in [-\pi, \pi)\} \cup \{(2\cos(t), 4, 2\sin(t)) : t \in [-\pi, \pi)\}.$$

לכן נקבל ממשפט סטוקס

$$\int\int_M F \cdot ndS = \int\int_M (\nabla \times G) \cdot ndS$$

$$= \int_\gamma G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz = \int_\gamma zxdy + 2xydz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 4\cos(t)(-\sin(t))' dt + \int_{-\pi}^{\pi} 16\cos(t)(2\sin(t))' dt$$

$$= 28 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = 14 \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2t)) dt = 28\pi.$$