

אינפי 4 : תרגול 10

7 יוני 2016

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני באמצעות משפט סטוקס

הקדמה: נניח ש- M הוא משטח אוריינטבילי ב- \mathbb{R}^3 עם שפה $\Gamma = \partial M$ סגורה. נניח ש- n הוא נורמל יחידה רציף על M ו-

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$$

היא פרמטריזציה חלקה ופשוטה המכוונת את Γ בכיוון החיובי ביחס לנורמל n . אז ממשפט סטוקס אנו יודעים שלכל שדה וקטורי $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ שגזיר ברציפות בסביבה של המשטח M מתקיים

$$\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int \int_M (\nabla \times F) \cdot n dS.$$

לכן, אם M' הוא משטח אוריינטבילי כלשהו כך ש- $\Gamma' = \Gamma = \partial M'$ (כלומר השפה של M' שווה לשפה של M) ואם n' הוא נורמל יחידה רציף על M' המכוון בכיוון החיובי ביחס לפרמטריזציה γ , אז שוב ממשפט סטוקס נקבל

$$\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int \int_{M'} (\nabla \times F) \cdot n' dS.$$

לכן נקבל ש-

$$\int \int_M (\nabla \times F) \cdot n dS = \int \int_{M'} (\nabla \times F) \cdot n' dS,$$

כלומר ניתן להחליף את האינטגרציה מ- M ל- M' .

דוגמא: חשבו את האינטגרל $\int \int_M (\nabla \times F) \cdot n dS$ כאשר M הוא חצי האליפסואיד

$$M = \{(x, y, z) : 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36, z \geq 0\},$$

n הוא נורמל יחידה חיצוני ו- F נתונה לפי

$$F(x, y, z) = \left(\cos x \sin z + x^2 y^3, x^3, e^{x^2+z^2} - e^{y^2+z^2} + \sin(xy) \right).$$

פתרון: אם $G = \nabla \times F$ אז ע"י חישוב ישיר ניתן להראות ש-

$$G = \left(-2ye^{y^2+z^2} + x \cos(xy), \cos x \cos z - 2xe^{x^2+z^2} - y \cos(xy), 3x^2 - 3y^2x^2 \right).$$

כמו כן, מהנתון על M ש- $z \geq 0$ נובע של- M יש את הפרמטריזציה

$$\phi(x, y) = \left(x, y, z(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} \right), \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$$

לכן הנורמל n נתון לפי

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = (-z_x, -z_y, 1) = \left(\frac{x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}}, \frac{y}{9\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}}, 1 \right)$$

וזהו אכן נורמל חיצוני כי רכיב ה- z חיובי. כעת אם נציב את הזהויות שקיבלנו באינטגרל המשטחי נקבל אינטגרל בלתי פתיר. גם אם ננסה לחשב את האינטגרל לפי משפט סטוקס ע"י מעבר לאינטגרל קווי מסוג שני על השפה של M :

$$\partial M = \gamma = \{(2 \cos t, 3 \sin t, 0) : t \in [-\pi, \pi)\}$$

נקבל את האינטגרל

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz &= \int_{-\pi}^{\pi} (108 \cos^2(t) \sin^3(t) (2 \cos t)' + 8 \cos^3(t) (3 \sin t)') dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (24 \cos^4(t) - 216 \cos^2(t) \sin^4(t)) dt \end{aligned}$$

שדי קשה לחישוב. מצד שני, מההסבר הקודם אנו יודעים שאת האינטגרל המשטחי על M ניתן להחליף לאינטגרל המשטחי על

$$M' = \{(x, y, z) : 9x^2 + 4y^2 \leq 36, z = 0\}$$

עם הנורמל המתאים $n' = (0, 0, 1)$ לכן נקבל ש-

$$\begin{aligned} \int \int_M (\nabla \times F) \cdot n dS &= \int \int_{M'} (\nabla \times F) \cdot n' dS \\ &= \int \int_{M'} G \cdot n' dS = 3 \int_{9x^2+4y^2 \leq 36} (x^2 - x^2y^2) dx dy. \end{aligned}$$

לאחר החלפת המשתנים

$$x = 2r \cos \theta, y = 3r \sin \theta, dx dy = 6r d\theta dr$$

נקבל

$$\begin{aligned} \int \int_M (\nabla \times F) \cdot n dS &= 18 \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (4r^2 \cos^2 \theta - 36r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) r d\theta dr \\ &= 18 \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (4r^2 \cos^2 \theta - 9r^4 (\sin(2\theta))^2) r d\theta dr \\ &= 18 \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(2r^2(1 + \cos(2\theta)) - \frac{9r^4}{2}(1 - \cos(4\theta)) \right) r d\theta dr \\ &= 36\pi \int_0^1 \left(2r^2 - \frac{9r^4}{2} \right) r dr = 36\pi \int_0^1 \left(2r^3 - \frac{9r^5}{2} \right) dr \\ &= 36\pi \left(\frac{r^4}{2} - \frac{3r^6}{4} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = -9\pi. \end{aligned}$$

דוגמא: יהי M הטרהדרון התחום ע"י המישורים $x = 0, y = 0, z = 0$ ו- $x + 2y + 3z = 1$ אך ללא התחתית, כלומר ללא הנקודות מהצורה $(x, y, 0)$. תהי $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$, חשבו את האינטגרל $\int \int_M (\nabla \times F) \cdot n dS$ כאשר n הוא נורמל יחידה חיצוני.

פתרון: נחשב את האינטגרל המשטחי על הבסיס של הטרהדרון במקום על החלק העליון שלו. לבסיס M' יש את הפרמטריזציה

$$M' = \{(x, y, 0) : x + 2y \leq 1, x, y \geq 0\}.$$

קל לבדוק שהנורמל n' של M' , המתאים לנורמל החיצוני n של M , הוא $n' = (0, 0, 1)$ כמו כן

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = (-y, -z, -x).$$

לכן

$$\int \int_M (\nabla \times F) \cdot n dS = \int \int_{M'} (\nabla \times F) \cdot n' dS$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{x+2y \leq 1, x, y \geq 0} x dx dy = - \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} x dy dx = - \int_0^1 x \cdot y \Big|_{y=0}^{\frac{1-x}{2}} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^2) dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני ע"י פתרון המשוואה $\nabla \times G = F$

הקדמה: לפעמים נרצה לחשב אינטגרליים משטחיים מסוג שני כלליים

$$\int \int_M F \cdot n dS$$

ע"י משפט סטוקס. כדי להשתמש במשפט סטוקס אנו חייבים למצוא שדה וקטורי G המקיים $\nabla \times G = F$. לכן ננסח את המשפט הבא הנותן תנאי הכרחי ומספיק על השדה הוקטורי F לקיום שדה וקטורי G המקיים את הנ"ל.

משפט: יהי $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ שדה וקטורי שגזיר ברציפות. אז קיים שדה וקטורי $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ שגזיר פעמיים ברציפות ומקיים $\nabla \times G = F$ אם ורק אם $\operatorname{div} F(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}^3$. במקרה זה ניתן לבחור את השדה G להיות $G = (0, G_2, G_3)$ כאשר

$$G_2(x, y, z) = \int^x F_3(t, y, z) dt,$$

$$G_3(x, y, z) = \int^y F_1(0, t, z) dt - \int^x F_2(t, y, z) dt.$$

דוגמא: יהי M המשטח הנתון לפי

$$\{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 1 \leq z \leq 3\}.$$

חשבו את האינטגרל $\int \int_M F \cdot n ds$ כאשר n הוא נורמל יחידה חיצוני ו-
 $F(x, y, z) = (x + z^2, 0, -z - 3)$.

פתרון: כיוון ש-

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial(x + z^2)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(-z - 3)}{\partial z} = 1 - 1 = 0$$

נובע שקיים שדה וקטורי G המקיים $\nabla \times G = F$. לפי המשפט ל- G יש את הצורה $G = (0, G_2, G_3)$ כאשר

$$G_2 = \int^x (-z - 3) dt = -(z + 3)x,$$

$$G_3 = \int^y (0 + z^2) dt - \int^x 0 dt = z^2 y.$$

כמו כן לשפה של המשטח M יש את הפרמטריזציה (החיובית ביחס לנורמל n)

$$\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, 3), t \in [-\pi, \pi].$$

לכן ממשפט סטוקס נקבל

$$\begin{aligned} \int \int_M F \cdot ndS &= \int \int_M (\nabla \times G) \cdot ndS = \int_{\gamma} G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz \\ &= \int_{\gamma} -(z + 3) x dy + z^2 y dz = \int_{-\pi}^{\pi} -6 \cos(t) (-\sin(t))' dt \\ &= 6 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = 3 \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2t)) dt = 6\pi. \end{aligned}$$

דוגמא: חשבו את האינטגרל $\int \int_M F \cdot ndS$ כאשר

$$M = \{(x, y, z) : y^2 = 4(x^2 + z^2), 2 \leq y \leq 4\},$$

n הוא נורמל חיצוני ל- M ו- $F(x, y, z) = (x, -2y, z)$.

פתרון: כיוון ש-

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(-2y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 - 2 + 1 = 0$$

נובע שקיים שדה וקטורי G המקיים $\nabla \times G = F$. לפי המשפט ל- G יש את הצורה $G = (0, G_2, G_3)$ כאשר

$$G_2 = \int^x z dt = zx,$$

$$G_3 = \int^y 0 dt - \int^x (-2y) dt = 2xy.$$

כעת לשפה של G יש את הפרמטריזציה, המכוונת את השפה בכיוון החיובי ביחס לנורמל החיצוני, הנתונה לפי

$$\gamma(t) = \{(\cos t, 2, -\sin t) : t \in [-\pi, \pi)\} \cup \{(2 \cos(t), 4, 2 \sin(t)) : t \in [-\pi, \pi)\}.$$

לכן נקבל ממשפט סטוקס

$$\begin{aligned} \int \int_M F \cdot ndS &= \int \int_M (\nabla \times G) \cdot ndS \\ &= \int_{\gamma} G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz = \int_{\gamma} z x dy + 2 x y dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos(t) (-\sin(t))' dt + \int_{-\pi}^{\pi} 16 \cos(t) (2 \sin(t))' dt \\ &= 28 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = 14 \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2t)) dt = 28\pi. \end{aligned}$$

דוגמא: חשבו את האינטגרל $\int \int_M F \cdot ndS$ כאשר

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0, y = \pm 1\} \cup \{(x, y, z) : |x|, |y| \leq 1, z = 0\},$$

אל $F(x, y, z) = (x, e^{x^2 - z^2} + y, -2z)$ ו- n הוא נורמל היחידה הרציף הפונה אל הנקודה $(0, 0, 1)$.

פתרון: כיוון ש-

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(e^{x^2 - z^2} + y)}{\partial y} + \frac{\partial(-2z)}{\partial z} = 1 + 1 - 2 = 0$$

נובע שקיים שדה וקטורי G המקיים $\nabla \times G = F$. לכן אם M' הוא משטח עם נורמל יחידה n' שהשפה שלו מתלכדת עם השפה של M , כאשר הנורמל עבור שני המשטחים מכוון בכיוון החיובי ביחס לשפה, אז ממשפט סטוקס נקבל ש-

$$\int \int_M F \cdot ndS = \int \int_M (\nabla \times G) \cdot ndS = \int \int_{M'} (\nabla \times G) \cdot n' dS = \int \int_{M'} F \cdot n' dS.$$

לכן ניתן להחליף את האינטגרציה מ- M לכל משטח אחר M' שהשפה שלו מתלכדת עם השפה של M .

השפה של M מורכבת משני חצאי המעגלים

$$C_1 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 1, z \geq 0, y = 1\},$$

$$C_2 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 1, z \geq 0, y = -1\}$$

ומשני הקטעים

$$l_1 = \{(x, y, z) : |y| \leq 1, x = 1, z = 0\},$$

$$l_2 = \{(x, y, z) : |y| \leq 1, x = -1, z = 0\}.$$

לכן השפה של M מתלכדת עם השפה של חצי הגליל

$$M' = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 1, z \geq 0, |y| \leq 1\}.$$

ל- M' יש את הפרמטריזציה

$$\phi(\theta, t) = (\cos \theta, t, \sin \theta), (\theta, t) \in [0, \pi] \times [-1, 1]$$

עם הנורמל

$$n' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix} = (\cos \theta, 0, \sin \theta).$$

וקל לבדוק שנורמל זה מכוון באופן חיובי ביחס לנורמל של M . לכן

$$\begin{aligned} \int_M F \cdot n dS &= \int_{M'} F \cdot n' dS = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 F(\cos \theta, t, \sin \theta) \cdot (\cos \theta, 0, \sin \theta) dt d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 \langle (\cos \theta, e^{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} + t, -2 \sin \theta), (\cos \theta, 0, \sin \theta) \rangle dt d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) dt d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) t \Big|_{t=-1}^{t=1} d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) d\theta = 2 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - 3 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{3}{2} (1 - \cos(2\theta)) \right) d\theta = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \theta \right) d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$