תרגול 11- פתרון נוסחאות נסיגה

<u>תרגיל</u>

בכמה דרכים ניתן לרצף שורה של n משבצות בעזרת משבצות ב5 צבעים שונים כך שאין רצף של 3 משבצות צהובות?

נסמן $T(n) =$ מס' הדרכים לרצף כך שורה של n משבצות.

נסתכל על המשבצות הראשונות ונפריד למקרים:

- אם המשבצת הראשונה לא צהובה (יש לך **4** אפשרויות)- אז מספיק למצור ריצוף תקין ל$n-1$ משבצות. ולכך יש $T(n-1)$ אפשרויות.
- אם המשבצת הראשונה צהובה והשנייה לא צהובה (שוב, יש לכך **4** אפשרויות)- מספיק למצוא ריצוף תקין ל$n-2$ משבצות ולכך יש $T(n-2)$ אפשרויות.
- אם 2 המשבצות הראשונות צהובות והשלישית לא צהובה (**4** אפשרויות)- נשאר לרצף $n-3$ משבצות, ואת זה ניתן לעשות ב$T(n-3)$ דרכים.

סה"כ: $T(n) = 4T(n-1) + 4T(n-2) + 4T(n-3)$

נמצא תנאי התחלה: $\mathrm{T}(1) = 5\ ,\ \mathrm{T}(2) = 5^2\ ,\ T(3) = 5^3 - 1$

פתרון נוסחאות נסיגה

<u>משפט</u>: תהי $f(n) = p_1 f(n-1) + p_2 f(n-2) + \cdots + p_r f(n-r)$ נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית מסדר r.
הפולינום $\varphi(t) = t^r - p_1 t^{r-1} - p_2 t^{r-2} - \cdots - p_r$ נקרא הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה f.
אם לפולינום האופייני $\varphi(t)$ יש r שורשים ממשיים <u>שונים</u> $x_1, \dots, x_r$ אזי הפתרון הכללי של נוסחת הנסיגה הוא מהצורה $f(n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \cdots + \alpha_r x_r^n$, כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ הם מספרים ממשיים שניתן למצוא בעזרת תנאי ההתחלה.

<u>דוגמה</u>: פתור את נוסחת הנסיגה הבאה: $f(0) = 1, f(1) = 1, \forall n \geq 2: f(n) = f(n-1) + 2f(n-2)$.
<u>פתרון</u>:
$r = 2$ ולכן הנוסחה המפורשת תהיה מהצורה $f(n) = \alpha_1 {x_1}^n + \alpha_2 {x_2}^n$.
מהגדרת $f(n)$ נקבל ש $p_1 = 1, p_2 = 2$, לכן הפולינום האופייני הוא $\varphi(t) = t^2 - t - 2$.
שורשי הפולינום האופייני הם $x_1 = 2, x_2 = -1$, כלומר $f(n) = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$.
כעת נציב את תנאי ההתחלה:

$$f(0) = \alpha_1 2^0 + \alpha_2 (-1)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$
$$f(1) = \alpha_1 2^1 + \alpha_2 (-1)^1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 = 1$$

נקבל ש $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ ו $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, כלומר $f(n) = \frac{2}{3} 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$.

תרגיל

פתור את נוסחת הנסיגה $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 14$

הפולינום האופייני: $\varphi(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$

יש לנו שורש אחד ברור $x_1 = 1$ ואז קל למצוא שלפולינום יש פירוק:

$\varphi(t) = (t-1)(t^2 + 5t + 6)$ ולכן שאר השורשים הם $x_2 = 2, x_3 = 3$

ונקבל ש- $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 \\ a_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 7 \\ a_3 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 15 \end{cases}$$ נפתור ונקבל: $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$

וסה"כ: $a_n = 2 + 2^n + 3^n$

תרגיל

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \;, a_1 = -1, a_2 = 1$$

הפולינום האופייני: $x^2 - 5x + 6 = 0$. שורשי המשוואה הם $x_1 = 2, x_2 = 3$. לכן $a_n = \alpha(2)^n + \beta(3)^n$. נמצא את α, β באמצעות תנאי הבסיס של הרקורסיה: $a_1 = 2\alpha + 3\beta = -1$, $a_2 = 4\alpha + 9\beta = 1$ כלומר $\beta = 1, \alpha = -2$.

לסיכום נקבל $a_n = -(2)^{n+1} + (3)^n$ לכל $n \geq 0$.

תרגיל

הפולינום האפייני $x^2-2x-1=0$

כלומר שורשי הפולינום הם : $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$ ולכן נוסחת הנסיגה היא מהצורה $a_n=\alpha(1+\sqrt{2})^n+\beta(1-\sqrt{2})^n$ $a_0=1, a_1=3$.

כלומר $a_1=3=\alpha(1+\sqrt{2})+\beta(1-\sqrt{2})$ $a_0=1=\alpha+\beta$.

מהתנאי השני נקבל $\alpha=1-\beta$ ולכן:

$$3=(1-\beta)(1+\sqrt{2})+\beta(1-\sqrt{2})=1-2\sqrt{2}\beta+\sqrt{2}$$

כלומר $\beta=\dfrac{-\sqrt{2}+1}{2}$, $\alpha=1-\beta=1-\dfrac{-\sqrt{2}+1}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

לסיכום נקבל: $a_n=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1}+\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}$