## **אלגברה מופשטת 1 – תרגול 6**

**תרגיל**: תהא $G$ חבורה סופית $|G|=n$, יהי $k$ טבעי כך ש$k|n$. האם קיים בהכרח איבר מסדר $k$ ב$G$?

פתרון: לא. נביט ב$G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$. מתקיים כי $|G|=16$ אבל אנחנו טוענים כי אין איבר ב$G$ מסדר 4. למעשה, כל $(a,b)\in G$ מתקיים כי $(a,b)^4=(4a,4b)=(0,0)$ ולכן $O\left((a,b)\right)\le 4$. מ.ש.ל. ■

אגב, הראינו ש$G$ אינה ציקלית.

<u>תת חבורה נורמאלית (תח״נ)</u>

הגדרה: תהא $G$ חבורה $H\le G$ נקראת תח״נ אם $\forall g\in G: gH=Hg$ ונסמן $H\lhd G$.

**משפט**: התנאים הבאים שקולים:

1. $H\lhd G$.
2. $\forall g\in G\ gHg^{-1}=H$
3. $\forall g\in G\ gHg^{-1}\subseteq H$ (פרוש: $\forall g\in G\forall h\in H\ ghg^{-1}\in H$).

דוגמאות:

1. בחבורה אבלית, כל ת״ח היא נורמלית
2. בחבורה לא אבלית, זה לא בהכרח נכון. למשל, $G=S_3$ ו$H=<(12)>=\{(12),id\}$ וראינו כי $(13)H\neq H(13)$ ולכן $H$ אינה נורמלית ב$G$.
3. $SL_n(\mathbb{R})\le GL_n(\mathbb{R})$.

**טענה**: תהא G חבורה, $H\le G$ אם $[G:H]=2$ אזי $H\lhd G$.

הוכחה: נניח $[G:H]=2$. מכאן שקיימים שתי קוסטים ימניים שונים, $H,Ha_{a\notin H}$. (שימו לב ש$H=Ha$ אוי״א a שייך לH. ו$Hx=Hy$ אוי״א $xy^{-1}\in H$) כלומר, $G=H\uplus_{\text{איחוד זר}}Ha$.

כעת מתקיים $H\neq aH$ ולכן $G=H\uplus_{\text{איחוד זר}}aH$. ומכאן ש$H\uplus Ha=H\uplus aH$ ולכן לכל a של שייך לH מתקיים כי $aH=Ha$, אבל אם a שייך לH ברור ש$Ha=H=aH$ ולכן זה לכל a. מ.ש.ל. ■

<u>דוגמית לתרגיל</u>: $|D_n|=2n$ ראינו שעבור $\sigma\in D_n$(סיבוב) מתקיים $o(\sigma)=n$. ולכן $|<\sigma>|$. מכאן ש$<\sigma>\lhd D_n\rightarrow [D_n:<\sigma>]=2=\frac{|D_n|}{|<\sigma>|}$.

<u>הגדרה</u>: תהא $G$ חבורה $a,b\in G$ יקראו <u>צמודים</u> אם קיים $x\in G$ כך ש$a=xbx^{-1}$.

<u>ננסח מחדש את הגדרת הנורמליות:</u>

$H\le G$ תח״נ אם היא סגורה להצמדות , כלומר, לכל $h$ שייך ל$H$ ולכל $g$ שייך ל$G$ מתקיים $ghg^{-1}\in H$.
**תרגיל**: תהא $G$ חבורה, $H\le G$ ו$N\lhd G$ אזי $N\cap H\lhd H$.

פתרון: צ״ל להוכיח $\forall h\in H: h(N\cap H)h^{-1}\subseteq N\cap H$.

- שימו לב ש$N\cap H$ אכן ת״ח של $H$ שכן ראינו שחיתוך של ת״ח הוא ת״ח

במילים אחרות, צ״ל: לכל $h$ שייך ל$H$ $x\in N\cap H$ מתקיים $hxh^{-1}\in N\cap H$.

קודם כל, נניח ש$x \in N \cap H$ , ולכן $x$ שייך ל$H$. ולכן $hxh^{-1} \in H$ בגלל הסגירות של ת״ח $H$. שנית, $x$ שייך ל$N$, ולכן $hxh^{-1} \in N$ כי $G \lhd N$ ולכן $hxh^{-1} \in N \cap H$. מ.ש.ל. ■

<u>הגדרה</u>: יהיו $N, H \leq G$ נגדיר את המכפלה $HN = \{hn | h \in H, n \in N\}$.

**תרגיל**: בבית תוכיחו את הטענה הבאה: אם $N, H \lhd G$ אזי $HN \lhd G$.

עכשיו הראו שאם $H,N$ ת״ח לא נורמליות אז $HN$ אינה בהכרח ת״ח של $G$.

פתרון: שיקוף $D_3$ $N =< \tau >= \{\tau, id\}$ , $H =< \tau\sigma >= \{\tau\sigma, id\}$ . $N$ אינה נורמלית $N\sigma \neq \sigma N$. גם $H$ אינה נורמלית, לפי מה שקורה ב$\tau H \neq H\tau$.

עכשיו נראה ש$HN$ אינה ת״ח של $G$. $HN = \{\tau\tau\sigma, \tau, \tau\sigma, id\} = \{\sigma, \tau, \tau\sigma, id\}$ וזה לא תת חבורה של $D_3$. בגלל שתי סיבות:

א. כי הסדר שלו בכלל לא מחלק את 6 (4 לא מחלק את 6
ב. אין בה בכלל סגירות. $\sigma^2 \notin NH$ .

מ.ש.ל. ■.

<u>הומומורפיזם</u>

תהינה $H,G$ חבורות . העתקה $\varphi: G \to H$ תקרא הומו׳ אם $\forall a, b \in G : \varphi(a \cdot_G b) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b)$.

תכונות :

1. $\varphi(e_G) = e_H$
2. $\forall n \in \mathbb{Z} : \varphi(a^n) = \varphi(a)^n$ ובפרט $\left(\varphi(a^{-1})\right) = \varphi(a)^{-1}$
3. $\forall a \in G : O\left(\varphi(a)\right) \mid O(a)$
4. אם $G$ אבלית אזי $\varphi(G) \leq H$ היא אבלית.

- <u>איזומופריזם</u> : הומומורפיזם חח״ע ועל .
  הוא שומר על:
  א. סדר של חבורה
  ב. סדר של כל איבר
  ג. אבליות
  ד. ציקליות

דוגמאות :

1. האם $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4$?
   לא! מכיוון ש$\mathbb{Z}_4$ ציקלית ו$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ לא.
2. האם בין כל שתי חבורות $G,H$ ניתן למצוא הומומורפיזם?
   כן. הומומורפיזם טריוויאלי. $\varphi: G \to H$ כך ש$\forall a \in G : \varphi(a) = e_H$.
3. תהא $G$ חבורה אבלית. יהי $n$ שלם. האם $\varphi: G \to G$ המוגדרת על ידי $\varphi(x) = x^n$ היא הומומורפיזם?
   כן. $\varphi(xy) = (xy)^n \overset{\text{אבליות}}{=} x^n y^n = \varphi(x)\varphi(y)$
4. האם $\mathbb{Q} \cong \mathbb{R}$?
   לא. משיקולי עוצמות ידוע כי $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{Q}|$.

5. האם $5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$?
כן. כל החבורות הציקליות האינסופיות הן איזומורפיות זו לזו. האיזומורפיזם הדרוש הוא $\varphi: \mathbb{Z} \to 5\mathbb{Z}$ , $\varphi(n) = 5n$.
6. האם $\mathbb{Z}_6 \cong D_3$?
לא. משיקולי אבליות.
7. האם $S_3 \cong D_3$ ? תחשבו על זה, נענה על זה בהמשך הקורס ☺

**תרגיל**: יהי $\varphi: G \to H$ אפימורפיזם. הוכיח שאם $G$ ציקלית אזי $H$ ציקלית.

פתרון: $G$ ציקלית ולכן קיים $g$ ב-$G$ כך ש-$G$=<$g$>. נסמן $\varphi(g) = h$. נרצה להראות $H$=<$h$>. יהי $x$ ב-$H$ וצ"ל שקיים $i$ כך ש-$x = h^i$. עבור $x$ ששייך ל-$H$ קיים $a$ שייך ל-$G$ כך ש-$\varphi(a) = x$ כי $\varphi$ אפימורפיזם. $a \in < g >$ ולכן קיים $i$ כך ש-$a = g^i$ ולכן $x = \varphi(a) = \varphi(g^i) = \varphi(g)^i = h^i$. מ.ש.ל. ■.

הערה: אפימורפיזם מעבר קבוצות יוצרים לקבוצת יוצרים. הוכחה משעממת ביותר באינדוקציה, תסמכו על לואי.

**הוכיחו/הפריכו:**

1. קיים איזומורפיזם $f: (\mathbb{Q}^+,\cdot) \to (\mathbb{Q},+)$
2. קיים אפימורפיזם $f: H \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ כאשר $\mathrm{H} =< 5 > \le (\mathbb{R}^*,\cdot)$
3. קיים מונומורפיזם $f: (GL_2(\mathbb{Q}),\cdot) \to (\mathbb{Q}^{10},+)$

פתרון:

1. נניח בשלילה שקיים איזומורפיזם. קיים C ב-$\mathbb{Q}$ כך ש-f(5)=C. אבל f אפי' ולכן קיים מקור ל-$\frac{C}{2}$ שנסמנו בx. $f(x) = \frac{C}{2}$. אמור להתקיים $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = C = f(5)$ אבל f חח"ע, ו-$x^2 = 5$ וזאת סתירה.
2. H ציקלית, ו-$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ לא ציקלית (הראנו במהלך השיעור כי הסדר של כל איבר הוא לכל היותר 3 ולכן אין איבר מסדר 9). ולכן זו הפרכה, אין אפימורפיזם.
3. הפרכה: ראשית נסכים על הטענה שעבור $f: G \to H$ מונו' אזי $f: G \to f(G)$ איזו'. אם קיים מונומורפיזם כנ"ל, אזי קיים איזומורפיזם לתת חבורה של $(\mathbb{Q}^{10},+)$, אבל זאת סתירה, כי $(\mathbb{Q}^{10},+)$ אבלית ועם זאת ידוע לנו כי $(GL_2(\mathbb{Q}),\cdot)$ אינה אבלית.

**<u>כולם הפרכות! בסתירה ללוגיקה של גיא ☺</u>**

<u>גרעין ותמונה:</u>

יהי $\varphi: G \to H$ הומומורפיזם

- $ker\varphi = \{g \in G: \varphi(g) = e_H\}$
- $Im\varphi = \{\varphi(g): g \in G\} = \{h \in H: \exists y \in G : \varphi(g) = h\}$,

ראינו בשיעור שמתקיים $\ker(f) \lhd G$ , $\mathrm{Im}\varphi \le \mathrm{H}$.

<u>דוגמאות:</u>

1. $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_6$. $\varphi(\mathrm{n},\mathrm{k}) = \left(2\mathrm{n}, 2\mathrm{k}(\mathrm{mod} 6)\right)$.
$ker\varphi = \{0\} \times \{0,3\}, Im\varphi = 2\mathbb{Z} \times \{0,2,4\}$.

2. $\mathbb{R}_3[x]$ החבורה החיבורית של פולינומים במקשים ממשיים עד דרגה 2 כולל.
נגדיר $f: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ כך ש$f\big(p(x)\big) = p'(x)$
הפולינומים הקבועים $\ker(f) = \{c : c \in \mathbb{R}\}$
ועבור התמונה ברור כי $\mathrm{Im(f)} \cong \mathbb{R}_2[x]$

- <u>צמודים (אתגר)</u>:
אם הסדר של חבורה $G$ הוא אי זוגי , אזי אף איבר (פרט ליחידה) אינו צמוד להופכי שלו!