

# פיסיקה למתמטיקאים

## בעיית שני הגופים

1. שני גופים בעלי מסות  $m_1, m_2$  ומיקומים  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  נעים בהשפעת כח מרכזי

$$(1) \quad \vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{x^3}\vec{x},$$

כאשר  $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$  המרחק בין שני הגופים. הפוטנציאל המרכזי נתון ע"י

$$(2) \quad \varphi(x) = -\frac{Gm_1m_2}{x}.$$

ראינו בכיתה כי מרכז המסה  $\vec{R}$  נע במהירות קבועה וכי האנרגיה נתונה ע"י

$$(3) \quad E = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{k}{x} = E_{cm} + E_0,$$

כאשר  $E_{cm}, M = m_1 + m_2, \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}, k = Gm_1m_2$  האנרגיה הקי-נטית של מרכז המסה ו  $E_0$  האנרגיה הכוללת המתארת תנועה ביחס למרכז המסה.

בקואורדינטות פולריות ניתן לרשום

$$(4) \quad E_0 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}.$$

מאחר והתנע הזויתי

$$(5) \quad J = \mu r^2 \dot{\theta}$$

נשמר אפשר לרשום את (4) כ

$$(6) \quad E_0 = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r},$$

כאשר

$$(7) \quad \varphi_{eff} = \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

הפוטנציאל האפקטיבי. סידור איברים ב (6) נותן

$$(8) \quad \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_0 + \frac{k}{r} - \frac{J^2}{2\mu r^2}\right)}} = dt.$$

נבצע כעת החלפת משתנים  $u = 1/r$  ונשתמש ב (5) על מנת לרשום

$$(9) \quad -\frac{du}{\sqrt{\frac{2E_0}{J^2} + \frac{2mk}{J^2}u - u^2}} = d\theta.$$

האינטגרל באגף שמאל של (9) פתיר אנליטית  $(\frac{du}{\sqrt{a+bu^2-u^2}} = \arccos \frac{2u-b}{\sqrt{b^2+4a}})$  נקבל אפוא

$$(10) \quad r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

כאשר  $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_0 J^2}{\mu k^2}}$ ,  $r_0 = \frac{J^2}{\mu k}$  משוואה (10) נקראת משוואת חתכי חרוט.

כאשר  $E_0 > 0$  ( $\epsilon > 1$ ) המסלול היפרבולי.

כאשר  $E_0 = 0$  ( $\epsilon = 1$ ) המסלול פרבולי.

כאשר  $-\frac{\mu k^2}{2J^2} < E_0 < 0$  ( $0 < \epsilon < 1$ ) המסלול אליפטי.

כאשר  $E_0 = -\frac{\mu k^2}{2J^2}$  ( $\epsilon = 0$ ) המסלול מעגלי.