ד"ר עינת אביאלי
הוקלד ע"י דביר חדד

הרצאה 5 -7.8.12

<u>מאורעות בלתי תלויים:</u>

הגדרה: שני מאורעות נקראים בלתי תלויי אם מתקיים $p(E\cap F)=p(E)\cdot p(F)$, אחרת המאורעות נקראים תלויים. דבר זה נבע מהגדרת ההסתברות המותנית $p(E/F)=\frac{p(E\cap F)}{p(F)}$.

אם נציב שם את ההגדרה נקבל $p(E/F)=p(E)$.

דוגמה:

בוחרים קלף באקראי מתוך חבילה רגילה של 52 קלפים. אם E הוא המאורע שהקלף הנבחר הוא אס ו-F הוא המאורע שנבחר הוא עלה. האם המאורעות תלויים?

$p(E\cap F)=\frac{1}{52}$, $p(F)=\frac{1}{4}$, $p(E)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$, ניתן לראות בבירור כי $p(E\cap F)=p(E)\cdot p(F)$, לכן הם בלתי תלויים.

טענה: אם E ו-F מאורעות בת"ל אזי גם E ו-F^C הם מאורעות בת"ל.

הוכחה: נניח E,F הם מאורעות בת"ל. נגדיר כי $E=(E\cap F)\cup(E\cap F^C)$. לכן $E\cap F, E\cap F^C$ הם מאורעות זרים, ומכך נקבל: $p(E)=p(E\cap F)+p(E\cap F^C)=p(E)\cdot p(F)+p(E\cap F^C)$ נבצע העברת אגפים פשוטה ונקבל $p(E\cap F^C)=p(E)\cdot[1-p(F)]=p(E)\cdot p(F^C)$ משל.

<u>משתנים מקריים:</u>

לפונקציות הממשיות המוגדרות על מרחב המדגם של ניסוי מקרי קוראים משתנים מקריים.

דוגמה:

נניח שהניסוי הוא הטלת 3 מטבעות תקינים אם Y מסמן את מספר הפעמים שהתקבל H אז Y הוא משתנה מקרי המקבל את אחד הערכים 0,1,2,3. $p(Y=0)=\{(TTT)\}$,

פעם אחת: $p(Y=1)=\{(HTT),(TTH),(THT)\}$

פעמיים: $p(Y=2)=\{(HHT),(THH),(HTH)\}$

שלוש פעמיים: $p(Y=3)=\{(HHH)\}$

ניתן לראות שהסכום הוא 1.

<u>פונקצית ההתפלגות המצטברת:</u>

פונקציה ההתפלגות המצטברת של F של משתנה מקרי C מוגדרת לכל מספר ממשי b על ידי נושחה כך שבעצם זה מוגדר להיות ההשתברות שמשתנה מקרי X יקבל ערך קטן או שווה ל-b. $F(b)=p(x\le b)$.

תכונות:

1. F היא פונקציה לא יורדת, כלומר אם $a<b$ מתקיים $F(a)\le F(b)$
2. $\lim_{b\to\infty}F(b)=1$
3. $\lim_{b\to-\infty}F(b)=0$
4. F רציפה מימין. כלומר לכל b ולכל סדרה יורדת b_n כאשר n גדול מאחד, המתכנסת ל-b מתקיים ש-$\lim_{n\to\infty}F(b_n)=F(b)$

תכונות 2-4 נובעות מתכונת הרציפות של ההסתברות.

תכונה 1 נובעת מכך שאם $a<b$, אזי המאורעים הבאים מקיימים $\{x\le a\}\subseteq\{x\le b\}$, ולכן $F(a)$ לא יכולה להיות גדולה מ-$F(b)$.

הערות:

1. לכל $a<b$ מתקיים $p(a\le x\le b)=F(b)-F(a)$.
2. אם נרצה לחשב את ההסתברות ש-x קטן ממש מ-b נוכל להשתמש בתכונת הרציפות של ההסתברות: $p(x<b)=p(\cup_{n=1}^{\infty}\left\{x\le b-\frac{1}{n}\right\})=p(\lim_{n\to\infty}\left\{x\le b-\frac{1}{n}\right\}=$

$\lim_{n\to\infty}p\left(x\le b-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}F\left(b-\frac{1}{n}\right)$ שימו לב ש-$F(b)=p(x<b)+p(x=b)$.

דוגמה :

פונקציה ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי x מוגדרת ע"י : $F(x)=\begin{cases}0\,;x<0\\ x/2\,;0\le x<1\\ 2/3\,;1\le x<2\\ 11/12\,;2\le x<3\\ 1\,;3\le x\end{cases}$ חשבו את :

$p(x<3)=\lim_{n\to\infty}p(x\le 3-\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}3-\frac{1}{n}=\frac{11}{12}$ כדרוש.

$p(x=1)=p(x\le 1)-p(x<1)=F(1)-\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ ע"פ הנתונים.

$p\left(x>\frac{1}{2}\right)=1-p\left(x\le\frac{1}{2}\right)=1-F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$ ע"פ חישוב פשוט.

<u>משתנים מקריים בדידים</u> :

משתני מקרי היכול לקבל לכל היותר מספר בן מניה של ערכים אפשריים נקרא משתנה מקרי בדיד.
מגדירים את הפונקציה הסתברות *p(a)* ע"י *p(a)=p(x=a)* . פונקצית ההסתברות חיובית לכל היותר למספר בן מנייה של ערכי *a*.כלומר, אם המשתנה המקרי *x* חייב לקבל אחד מקבוצת ערכים כלשהם אז לכל ערך אחד של *x* *p(x)=0*. מכיוון ש*x* חייב לקבל אחד מערכי x_i אזי מתקיים $\sum_{i=1}^{\infty}x_i=1$ את פונקצית ההתפלגות המצטברת ניתן לבטא באמצעות *p(x)* ע"י $F(a)=\sum_{x=x\le a}p(x)$.

דוגמה :

פונקצית ההסתברות/התפלגות של *x* נתונה ע"י $p(1)=\frac{1}{4},p(2)=\frac{1}{2},p(3)=\frac{1}{8},p(4)=\frac{1}{8}$. מהי פונקצית ההתפלגות המצטברת? <u>פתרון</u> : $F(a)=\begin{cases}0\,;a<1\\ \frac{1}{4};1\le a<2\\ \frac{3}{4};2\le a<3\\ \frac{7}{8};3\le a<4\\ 1\,;a\ge 4\end{cases}$.

<u>תוחלת</u> :

אם *x* הוא משתנה מקרי בדיד בעל פונקצית הסתברות *f(x)* אז התוחלת של *x*המסומנת ב*E(x)* מוגדרת ע"י הנוסחה $E(x)=\sum_{x:p(x)>0}x\cdot p(x)$.

<u>תוחלת של פונקצית משתנה מקרי</u> :

נניח שנתונה לנו פונקצית הסתברות של משתנה מקרי בדיד *x* ואנו רוצים לחשב את התוחלת של פונקציה כלשהי של *x*, נאמר *g(x)*. הפתרון הוא חישוב ע"פ הגדרת התוחלת.
טענה : אם *x*הוא משתנה מקרי בדיד, המקבל את הערכים $x_1,x_2,\ldots$ בהסתברות $p(x_1),p(x_2),\ldots$ בהתאמה, אזי לכל פונרציה ממשית *g* מתקיים $E(g(x))=\sum_i g(x_i)\cdot p(x_i)$.

דוגמה :

נסמן ב*x* משתנה מקרי בדיד המקבל את הערכים -1,0,1 בהסתברות $p(x=1)=0.3$, $p(x=-1)=0.2$, $p(x=0)0.5$, חשב את *E(x²)*.
פתרון :
נבצע זאת ע"י הצבה בנוסחא שיש בטענה: $\sum_i {x_i}^2\cdot p(x_i)=1^2\cdot 0.3+-1^2\cdot 0.2+0^2\cdot 0.5=0.5$ ומצאנו את הדרוש. $E(x^2)=0.5$

הערה: $E(x^2)\ne E^2(x)$

ד"ר עינת אביאלי
הוקלד ע"י דביר חדד

<u>מסקנה</u>: אם a,b הם קבועים, אזי $E(ax+b)=aE(x)+b$.
הוכחה: $E(ax+b)=\sum_{x:p(x)>0}(ax+b)\cdot p(x)=\sum ax\cdot p(x)+\sum b\cdot p(x)=a\cdot\sum x\cdot p(x)+b$ וע"פ הגדרת התוחלת קיבלנו את הדרוש.

התוחלת של משתנה מקרי x, דהיינו $E(x)$ מכונה גם בשמות כגון הממוצע של x או המומנט הראשון של x.
כאשר $n\geq 1$ הגודל $E(x^n)$ נקרא המומנט החי של x ומהטענה נקבל כי $E(x^n)=\sum_{x:p(x)>0}x^n\cdot p(x)$.

<u>שונות</u>:
בהינתן משתנה מקרי x בעל פונקציית התפלגות מצטברת F. התוחלת $E(x)$ נותנת את הממוצע המשוקלל איך אינה אומרת דבר על תחום ההשתנות או על האופן בו מפוזרים הערכים בתחום.

דוגמה: 3 משתנים מקריים:

$E(w)=0$	$P(w=0)=1$	$W=0$
$E(y)=0$	$P(y=-1)=0.5, p(y=1)=0.5$	$Y=-1,+1$
$E(z)=0$	$P(z=-100)=0.5, p(z=100)=0.5$	$Z=-100,+100$

צריך להעריך את ההשתנות האפשרית של ערכי xבאמצעות גודל שהגדרתו מבוססת על הפרשים שבין ערכי x לתוחלתו. גוזל זה מוגדר כתוחלת ריבועי ההפרש שבין x לתוחלתו.

<u>הגדרה</u>:
יהי x משתנה מקרי שתוחלתו μ . השונות של x מסומנת ב $V(x)$ ומוגדרת ע"י $V(x)=E(x-\mu)^2$. ויש נוהגים לסמנה ב$Var(X)$. ע"י פיתוח $V(x)$מתקבל: $V(x)=\sum_x(x-\mu)^2\cdot p(x)=$
$\sum(x^2-2x\mu+\mu^2)\cdot p(x)=\sum x^2\cdot p(x)-2\mu\sum x\cdot p(x)+\mu^2=$
$E(x^2)-2\mu^2+\mu^2=E(x^2)-E^2(x)$ וקיבלנו נוסחה חדשה: $V(x)=E(x^2)-E^2(x)$.

<u>טענה</u>: עבור a,b קבועים מתקיים $v(ax+b)=a^2V(x)$.
הוכחה: נסמן $E(x)=\mu$. כמו כן ידוע כי $E(ax+b)=aE(x)+b$.
$V(ax+b)=E[((ax+b)-(a\mu+b))^2]=E(a^2(x-\mu)^2)=a^2V(x)$. מ.ש.ל.

<u>הערה</u>: השורש הריבועי של השונות $V(x)$ מוגדר ע"י סטיית התקן ומסומן ב$SD(x)$ $SD(x)=\sqrt{V(x)}$.