תרגול 3 - עם פתרונות בהרחבה

פונקציות רציפות:

1. הגדרה: תהי $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ פונקציה בין מרחבים מטריים. נאמר שf היא רציפה ב$x \in X$ אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X, d(x,y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$$

שימו לב שההגדרה מקבילה להגדרה באינפי, כאשר במקום ערך מוחלט משתמשים במטריקה כללית.
תנאי שקול לרציפות בx הוא התנאי הבא: לכל סדרה $x_n \to x$, מתקיים: $f(x_n) \to f(x)$.
בנוסף, נאמר שפונקציה היא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה.

2. בהרצאה הוכחתם את השקילויות הבאות:

   (א) $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ רציפה.

   (ב) לכל $A \subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(A)$ פתוחה בX.

   (ג) f שומרת על התכנסות סדרות. כלומר, אם $x_n \to x$, אז $f(x_n) \to f(x)$.

3. הגדרות נוספות: פונקציה $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ נקראת "פונקציית ליפשיץ" אם קיים $k \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x,y \in X$ מתקיים:

$$\rho(f(x), f(y)) \le kd(x,y)$$

פונקציה נקראת רציפה במ"ש (במידה שווה) אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x,y \in X$ מתקיים:

$$d(x,y) < \epsilon \implies \rho(f(x), f(y)) < \delta$$

בהרצאה הוכחתם שכל פונקציית ליפשיץ רציפה במ"ש, וכל פונקציה רציפה במ"ש רציפה.

4. תרגיל: הוכיחו כי פונקציית ההטלה על רכיב i, $P_i : (l_\infty, d_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ($P_i((x_n)) = x_i$)
למשל:

$$P_i(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...) = \frac{1}{i}$$

היא לפשיץ

הוכחה: נוכיח שהיא פונקציית ליפשיץ עבור $k=1$.

$$|P_i\left((x_n)\right)-P_i\left((x_n)\right)|=|x_i-y_i|\leq\sup_n|x_n-y_n|=d_\infty\left(x,y\right)$$

5. תרגיל: אם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה במ״ש אז תמונה של סדרת קושי $\{x_n\}$היא קושי.
הוכחה: תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה רציפה במ"ש, ותהי (x_n) סדרת קושי.
המטרה היא להוכיח ש$(f(x_n))$ היא סדרת קושי.
ובכן, יהא $\epsilon>0$ נתון. לפי הגדרת רציפות במ"ש, קיים $\delta>0$ כך שלכל $x',x''\in X$ מתקיים:

$$d(x',x")\leq\delta\Rightarrow\rho\left(f(x'),f(x")\right)\leq\epsilon$$

בנוסף, לפי הגדרת סדרת קושי, קיים n_0 כך ש

$$\forall n,m\geq n_0:d(x_n,x_m)\leq\delta$$

ולכן

$$\forall n,m\geq n_0:\rho\left(f(x_n),f(x_m)\right)\leq\epsilon$$

כנדרש.

(א) הערה: עבור פונקציה רציפה שאינה רציפה במ"ש הטענה לא נכונה בהכרח. כלומר, אם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה, ו$(x_n)\subseteq X$ סדרת קושי, ייתכן ש$(f(x_n))$ אינה סדרת קושי.
הוכחה: נבנה דוגמא נגדית. נסתכל על המרחבים $\mathbb{R},(0,1)$ שניהם עם המטריקה האוקלידית.
נגדיר את הפונקציה הבאה: $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, המוגדרת ע"י $f(x)=\frac{1}{x}$.
מאינפי ידוע כי זאת פונקציה רציפה (הסיבה היא שהפונקציה רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת, ובנוסף היא מוגדרת בכל נקודה בקטע $(0,1)$.
כעת ניקח את הסדרה הבאה $(x_n=\dfrac{1}{n})\subseteq(x,1)$. סדרת קושי (ידוע מאינפי). אבל $(f(x_n)=n)$ אינה סדרת קושי ב$\mathbb{R}$.

פתיחות לפי תמונה הפוכה של פונקציה רציפה

1. הבחנה: אם ידוע ש$f:(X,d)\to(Y,\rho)$ היא פונקציה רציפה, אז ניתן להוכיח ש$A\subseteq X$ היא קבוצה פתוחה/ סגורה, אם היא שווה לתמונה ההפוכה של קבוצה פתוחה/ סגורה תחת f. כלומר, אם קיימת $B\subseteq Y$ פתוחה/ סגורה, כך ש$A=f^{-1}(B)$.

2. תרגיל: הוכיחו כי $A=\{(x,y):\ xy<1\}\subset\mathbb{R}^2$ פתוחה.
פתרון: הפונקציה $f(x,y)=xy$ רציפה (ידוע מאינפי 3) ו A היא תמונה הפוכה של הקטע הפתוח $(-\infty,1)$

3. תרגיל (שיופיע בש"ב): יהי (X,d) מרחב מטרי, ו$a\in X$. אזי $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ שמוגדרת ע״י $f_a(x)=d(x,a)$ רציפה.

תרגיל (מסקנה מהתרגיל הקודם): בכל מרחב מטרי, כדור סגור $B[a,r]$הוא קבוצה סגורה.
פתרון: נשים לב ש

$$B[a,r]=f_a^{-1}([0,r])$$

כלומר, תמונה הפוכה של קבוצה סגורה תחת פונקציה רציפה.

סגורים

1. הגדרה: תהי X תת קבוצה של מרחב מטרי. הסגור הסידרתי של X, מסומן ב$scl(X)$, הוא האוסף של כל הגבולות של סדרות מX. כלומר,

$$scl(X)=\{x:\exists\{x_n\}\subseteq X,x_n\to x\}$$

(א) תרגיל: במרחב l_∞ ניקח את התת קבוצה A של כל הסדרות שמתאפסות לבסוף.

$$A=\{(x_n)\in l_\infty:\exists n_0,\forall m>n_0,x_m=\}$$

מהו $scl(A)$?
פתרון:

$$scl(A)=\{(x_n)\in l_\infty:x_n\to 0\}$$

במילים: כל הסדרות (x_n) המקימות $\lim_x x_n=0$. (שימו לב שהדרישה שהסדרה שייכת לl_∞ מיותרת, כי ידוע שכל סדרה מתכנסת חסומה).
הוכחה: נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית.
$\supseteq$: תהי x סדרה שמתכנסת ל0. נסמן

$$x=(x_1,x_2,x_3,...)$$

נרצאה להוכיח שהיא שייכת ל$scl(A)$. כלומר, נרצה למצוא סדרה של סדרות שמתאפסות לבסוף, ששואפת לx. נגדיר את הסדרה של הסדרות באופן הבא:

$$a^1=(x_1,0,0,...)$$

$$a^2=(x_1,x_2,0,0,...)$$

$$a^3=(x_1,x_2,x_3,0,0,,...)$$

ובאופן כללי: a^n שווה ל n איברים הראשונים של x, ואח"כ אפסים. הסדרה הזאת מקיימת: $d(a^n,x)=\sup_{n<k}|x_k|\to 0$ ת מכיוון ש$x_n\to 0$.
$\subseteq$: לצורך כך נוכיח את הטענה השקולה: $scl(A)^c\supseteq\{(x_n)\in l_\infty:x_n\to 0\}^c$.
יהי xאיבר בl_∞ שלא מקיים $\lim_n x_n=0$. אז קיים ϵ, וכן סדרת אינדקסים $\{n_k\}$ כך ש $|x_{n_k}|\geq\epsilon>0$ (זוהי שלילת הגדרת הגבול).

לכן, לכל $a \in A$, מתקיים: $d(a,x) \geq \epsilon$.
הסבר: נניח ש

$$a = (a_1, ...a_{n'}, 0, 0, 0...)$$

קיים k כך ש$n_k > n'$. באותו רכיב נקבל $|x_{n_k} - a_{n_k}| \geq \epsilon$. ולכן

$$d(x,a) = \sup |x_i - a_i| \geq \epsilon$$

מכאן שאין סדרה בAששואפת אל x.

2. תרגיל: תהא $S \subseteq X$ סגורה ותהא $(s_n) \subseteq S$ סדרה מתכנסת: $s_n \to s$. אזי $s \in S$.
הוכחה: נניח בשלילה ש$s \notin S$. כלומר, $s \in S^c$. לפי הגדרת קבוצה סגורה, S^c פתוחה.
כעת, לפי הגדרת קבוצה פתוחה, קיים $r > 0$ כך ש$B(s,r) \subseteq S^c$.
מכיוון ש$(s_n) \subseteq S^c$, לכל n מתקיים כי $s_n \notin S^c$ ובפרט $s_n \notin B(s,r)$.לכן לכל n מתקיים ש $d(s_n, s) \geq r$. בסתירה לכך ש$s_n \to s$.

3. תרגיל: יהי (X,d) מ"מ, ו$A \subseteq X$. A סגורה אמ"מ היא מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה. כלומר לכל $(a_n) \subseteq A$, אם $a_n \to x$ אז $x \in A$.
הוכחה: $(\Leftarrow)$ ראינו.
$(\Rightarrow)$ נניח כי A מקיימת את התנאי, כלומר, מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה, ונוכיח כי A סגורה. לצורך כך נראה ש A^c פתוחה. נניח בשלילה שA^c אינה פתוחה. יש נקודה $x \in A^c$ כך שלכל $r > 0$, $B(x,r) \nsubseteq A^c$. כלומר, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. לכן לכל n, קיים $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. הסדרה (a_n) מקיימת: $a_n \to x$. הסבר:

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$$

בסתירה לנתון.

4. הגדרה: כעת נרצה להגדיר סגור של קבוצה (מסומן: $cl(A)$ או $\bar{A}$. יש מספר דרכים להגדיר את הסגור, כולן שקולות.
תרגיל: הוכיחו שההגדרות הבאות ל $cl(A)$ שקולות:

(א) $cl(A) = \{x : d(x,A) = 0\}$

(ב) הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A. $cl(A) = \cap_{A \subseteq S} S$, כאשר $A \subseteq S$ סגורה. (שימו לב שמכיוון שחיתוך של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה, הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A מצקבלת ע"י חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את A.)

הוכחה: נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית. לצורך נוחות, נסמן: $Y = \{x : d(x,A) = 0\}, Z = \cap_{A \subseteq S} S$

$Z \subseteq Y$: לצורך כך מספיק להוכיח כי Y סגורה. (מכיוון שZ מוכלת בכל הקבוצות הסגורות שמכילות את A).
ובכן, הפוקנציה $f_A : (X,d) \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$f_A(x) = d(x,A)$$

היא פונקציה רציפה (בש"ב). $Y = f_A^{-1}(\{0\})$, תמונה הפוכה של קבוצה סגורה, ולכן סגורה. לY סגורה ומכילה את A ולכן $Z \subseteq Y$.

מצד שני: יהא $x \in Y$ נראה כי $x \in S$ לכל $S \subseteq A$ סגורה. לצורך כך נראה שיש סדרה בA ששואפת לx, ולכן מסגירות S, נקבל ש$x \in S$. ובכן, מכיוון ש$d(x, A) =$ $\inf\{d(x,a) : a \in A\} = 0$, זה אומר שלכל n קיים $x_n \in A$ כך ש $d(x_n, x) < \dfrac{1}{n}$. לכן הסדרה (x_n)שואפת ל x. מכיוון ש$S \subseteq A$, (x_n) היא סדרה בS, ולכן מסגירות S נקבל ש$x \in S$.

5. תרגיל: לכל $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה הגרף שלה $G_f = \{(x, f(x))\}$ סגור ב $\mathbb{R}^2$.
הוכחה נוכיח שG_f סגורה לגבולות. ובכן, תהא $(x_n, f(x_n)) \subseteq G_f$ סדרה שמתכנסת ל (x, y). מאינפי 3 ידוע שזה גורר התכנסות רכיב-רכיב. כלומר, $x_n \to x$ ו $f(x_n) \to y$. אבל מכיוון שf רציפה, נקבל: $f(x_n) \to f(x)$. מיחידות הגבול נובע: $y = f(x)$. כלומר, $(x, y) = (x, f(x)) \in G_f$. מש"ל.

6. תרגיל:תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, כך ש$G_f$ סגורה. האם f רציפה?
פתרון: לא בהכרח. ניקח לדוגמא את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

כידוע,זאת לא פונקציה רציפה. כעת נראה כי הגרף של f סגור. ובכן, $G_f = \{(0,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{x}) : x \neq 0\}$. איחוד של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה, וכן כל קבוצה סופית סגורה, ולכן מספיק להוכיח שהקבוצה $\{(x, \frac{1}{x}) : x \neq 0\}$ סגורה. ובכן, נגדיר את הפונקציה הבאה $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ע"י $F(x, y) = xy$. זאת פונקציה רציפה מאינפי 3. כעת נשים לב שהקבוצה $F^{-1}\{1\} = \{(x, \frac{1}{x}) : x \neq 0\}$, תמונה הפוכה של קבוצה סגורה ולכן סגורה.

A' ונקודות מבודדות

1. הגדרה: יהי (X, d) מ"מ ו$A \subseteq X$. נקודת הצטברות של A היא נקודה x שקיימת סדרה ב $A \setminus \{x\}$ ששואפת אליה. בנוסף, מסמנים בA' את האוסף של כל נקודות ההצטברות. A' = נקודות הצטברות $\{x : x \in scl(A \setminus \{x\}\}$

2. הגדרות שקולות לנקודת הצטברות. x היא נקודת הצטברות של A אם היא מקיימת את אחת מבין התנאים השקולים הבאים:
   (א) קיימת סדרה לא קבועה לבסוף $A \subseteq (a_n)$ ששואפת לx.
   (ב) קיימת סדרה שכל איבריה שונים $A \subseteq (a_n)$ ששואפת לx.
   (ג) לכל $\epsilon > 0$, $(A \setminus \{x\}) \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$
   (ד) לכל $\epsilon > 0$, קיים $x \neq a \in A$ כך ש$d(x, a) < \epsilon$.

3. דוגמא בסיסית:
   (א) $A = (0, 1) \cup \{2\}$. אזי $A' = [0, 1]$.
   שימו לב כי לא מתקיימת הכלה בשום כיוון בין A לA'.

4. תרגיל: A סגורה $\iff A' \subseteq A$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ ידוע שאם A סגורה, אז היא מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה.

$\Rightarrow$ נניח ש$A' \subseteq A$ ונוכיח שA סגורה. שקול להוכיח שA^c פתוחה. נניח בשלילה שA^c לא פתוחה. כלומר, קיים $x \in A^c$ כך שלכל $\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. ובכן, נבנה סדרה ב$A$ בעלת איברים שונים שמתכנסת לx בצורה רקורסיבית: נבחר $a \in A$. נסמן $x_1 = a$. כעת, נניח שהגדרנו את x_n. נסמן $r_n = \min\{\frac{1}{n}, d(x_n, x)\}$, ונגדיר את x_{n+1} להיות איבר כלשהו ב$B(x, r_n) \cap A$. מתקיים:

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \to x$$

ולכן $x_n \to x$. בנוסף, לכל n, $d(x_{n+1}, x) < d(x_n, x)$ ומכן באינדוקציה שלכל $m > n$ $d(x_m, x) < d(x_n, x)$, לכן $x_m \neq x_n$. כלומר, מצאנו סדרה של איברים שונים שמתכנסת לx. סתירה.

5. תרגיל: הוכיחו שלכל קבוצה A, A' היא קבוצה סגורה.

פתרון: לצורך כך נוכיח ש$A" \subseteq A'$. ובכן, יהי $x \in A''$, ויהי $\epsilon > 0$. זה אומר שקיים $x \neq y \in A'$ כך ש$d(x,y) < \frac{\epsilon}{2}$. נסמן $r = d(x,y)$. מכיוון ש$y \in A'$, קיים $z \in A$ כך ש$d(z,y) < r$. מכאן ש$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{\epsilon}{2} + r < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. כמו כן, מכיוון ש$d(y,z) < d(x,y)$ נקבל ש$x \neq z$. לכן $x \in A'$.