

תזכורת: נוסחת קושי:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

תרגיל

$$\int_{|z-1|=3} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$$

פתרון

$f(z) = \cos z$ היא פונקציה אנליטית ב-C.

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{|z-1|=3} \frac{f(z)}{(z-i)^3} dz$$

$$I = \pi i \cdot f''(z_0) = -\pi i \cdot \cos i =$$

$$= -\pi i \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \boxed{-\frac{\pi}{2} i \left(e + \frac{1}{e} \right)}$$

תרגיל

חשבו

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2}$$

כאשר:

$$C_1 = \left\{ z \mid |z-i| = \frac{1}{2} \right\} .1$$

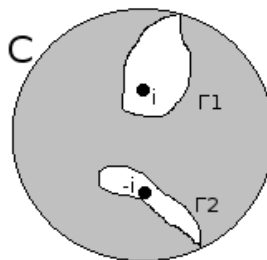
$$C_2 = \{z \mid |z| = 2\} .2$$

פתרון

$$1. \text{ אנליטית בפנים של } C_1 \quad \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(i+z)(z-i)}$$

$$f(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \underbrace{\frac{f(z)}{z-i}}_I dz \Rightarrow I = 2\pi i \cdot f(i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \boxed{\pi}$$

2. $\partial D = C - \Gamma_1 - \Gamma_2$, כאשר Γ_1, Γ_2 הם תת תחומים שמחוברים לשפה של C בנקודה אחת, וכוללים את הנקודות הבעייתיות $\pm i$. לכן בתחום $C - \Gamma_1 - \Gamma_2$ הפונקציה אנליטית. Γ_1, Γ_2 בסימן מינוס, כי מסתכלים על החוץ, ואז נגד כיוון השעון הופך להיות כיוון שלילי. חשוב לבנות אותם כך שיהיו זרים אחד לשני, ולא יחתכו את C .



$$\int_{\partial D} = \int_C - \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2}$$

לפי משפט קושי-גודסא

$$I = \int_C = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}$$

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^2}$$

$\int_{\Gamma_2} = \pi$ לפי סעיף 1. נבחר $g(z) = \frac{1}{z-i}$, ואז:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\Gamma_2} \frac{g(z)}{z+i} dz$$

$$g(-i) \cdot 2\pi i = \int_{\Gamma_2} \frac{g(z)}{z+i} dz = \frac{1}{-2i} \cdot 2\pi i = -\pi$$

קיבלנו

$$\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z^2} = \pi \quad \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^2} = -\pi$$

ולכן

$$\boxed{\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \pi - \pi = 0}$$

תרגיל

$$|z_0| \neq 1 \quad I = \int \frac{z + \bar{z}}{(z - z_0)^2} dz$$

פתרון

$$I = \int_{|z|=1} \frac{z(z + \bar{z})}{z(z - z_0)^2} dz = \int_{|z|=1} \frac{z^2 + |z|^2}{z(z - z_0)^2} dz = \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z(z - z_0)^2} dz$$

נחלק ל2 מקרים:

$$1. |z_0| > 1. \text{ במקרה הזה נקבל } \int \frac{z^2 + 1}{z(z - z_0)^2} dz \text{ כאשר } \frac{z^2 + 1}{(z - z_0)^2} \text{ אנליטית.}$$

$$I_1 = \int_{|z|=1} f(z) dz = \frac{2\pi i}{z_0^2} \cdot \frac{1}{z_0^2} \text{ במקרה הזה נקבע } f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z - z_0)^2} \text{ ואז } 0 < |z_0| < 1. 2.$$

$$2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{z_0^2} = \frac{2\pi i}{z_0^2}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z(z - z_0)^2} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{h(z)}{z} dz$$

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z} \quad h(z) = \frac{z^2 + 1}{(z - z_0)^2}$$

$$I_2 = 2\pi i g'(z_0) + 2\pi i h(0) = 2\pi i \left[1 - \frac{1}{z_0^2} \right] + 2\pi i \frac{1}{z_0^2} = 2\pi i \left[1 - \frac{1}{z_0^2} + \frac{1}{z_0^2} \right] = \boxed{2\pi i}$$

3. $|z_0| = 0$ - כלומר $z_0 = 0$.

$$I_3 = \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2i} \cdot (z^2 + 1)'' \Big|_{z=0} = \boxed{2\pi i}$$

שאלה

$$I = \int_{\Gamma} \frac{2z}{z^2 + 1} dz$$

$$\Gamma = \{z \mid |z| = 2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

1. האם קיימת פונקציה קדומה ל- $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 1}$?

2. חשב I .

פתרון

1. נשים לב ש- $f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$, $g(z) = z^2 + 1$. כלומר, נגזרת של ענף כלשהו של לוגריתם.

לכן, אם קיימת פונקציה קדומה ל- f אז היא בהכרח ענף כלשהו של $\log(z^2 + 1)$. ואז $\log(z^2 + 1)$ אינו אנליטי כי אם תחום מקיף נק' $(0, 0)$ אין בתחום זה ענף אנליטי של $\log \Leftarrow$ לא קיימת פונקציה קדומה ל- $\frac{2z}{z^2 + 1}$.

זה לא נכון!

הטעות היא שהנחנו שמקבלים ענף של לוגריתם. אבל יכול להיות שמקבלים כמה ענפים. ניתן להגדיר תחום כך שלא נצטרך לתפור.

תזכורת - משפט קושי: אם f אנליטית בתחום פשוט קשר כלשהו אז f יש פונקציה קדומה בתחום זה.

לכן ניתן לבחור

$$D_1 = \left\{ z \mid |z| > 1, \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

$$D_2 = \{z \mid |z| > 1\}, \arg(z) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

D פשוט קשר, מכיל את Γ . D לא מקיף את $(0, 0)$, לכן $\frac{2z}{z^2 + 1}$ אנליטית בתחום D , ולכן, לפי משפט קושי, יש לה פונקציה קדומה.

2. נשלים את Γ לקונטור סגור Γ' ע"י הוספת קטע $[-2, 2]$. נגדיר $g(z) = \frac{2z}{z^2 + i}$

אנליטית בתוך ועל Γ' ולכן

$$\int_{\Gamma'} \frac{2z}{z^2 + 1} dz = \int_{\Gamma'} \frac{g(z)}{z - i} dz = 2\pi i g(i) = 2\pi i$$

$$\int_{\Gamma} \frac{2z}{z^2+1} dz = \int_{\Gamma'} \frac{2z}{z^2+1} dz - \int_{-2}^2 \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= 2\pi i - \ln(x^2+1) \Big|_{-2}^2 = 2\pi i - [\ln 5 - \ln 5] = \boxed{2\pi i}$$

תרגיל

תהי f אנליטית בתחום $\left\{ z \mid \begin{array}{l} 0 \leq \text{Im}(z) \\ a \in \mathbb{R} \\ a > 0 \end{array} \right\}$ כך שמתקיים $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$

צ"ל: אם אינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ מתכנס אז $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ כאשר $\Gamma = \{z \mid \text{Im}(z) = a\}$

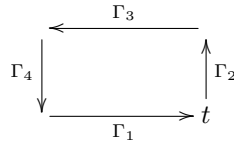
הערה: רק בתרגיל הזה, נגדיר $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx$

פתרון

$$\Gamma_t = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$$

$$\int_{\Gamma_t} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}$$

כאשר



על Γ_1 :

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{-t}^t f(x) dx$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) dz = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

על Γ_2 :

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z) dz \right| \leq a \cdot \max_{\Gamma_2} |f(z)| \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_2} f(z) dz \right| =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} a \cdot \max |f(z)| = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

אותו חישוב על Γ_3 ו Γ_4 , רק בכיוון ההפוך:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_3} f(z) dz = - \int_{\Gamma_1} f(z) dz$$

סה"כ, לפי קושי-גורסא נקבל

$$\int_{\Gamma_t} f(z) = 0$$

ולכן

$$0 = \int_{\Gamma_t} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt - \int_{\Gamma} f(t)$$