

פיסיקה למתמטיקאים קפיץ במישור

1. 2 מסות m_1, m_2 מחוברות באצעות קפיץ בעל קבוע k .

(א) רשמו את הלגראנגיאן

נתאר את התנועה במערכת מרכז המסה, כאשר r המרחק בין המסות ו θ הזווית ביחס לאופק. נקבל

$$(1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2,$$

כאשר $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ המסה המצומצמת.

(ב) רשמו את משוואות התנועה

משוואות התנועה עבור r ו θ בהתאמה הן

$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\theta}^2 - kr, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0. \quad (3)$$

משוואה (3) מתארת את שימור התנע הזויתי L . מהצבה ב (2) נקבל

$$(4) \quad \mu\ddot{r} = \frac{L^2}{\mu r^3} - kr = -V'_{eff}$$

כאשר $V_{eff} = L^2/2\mu r^2 + kr^2/2$ הפוטנציאל האפקטיבי.

(ג) מצאו את תדירות התנודות הקטנות אם מסיטים את המערכת בשיעור

$$|\delta| \ll r_0$$

מנקודת שווי המשקל r_0

נקודת שווי המשקל מקיימת $V'_{eff} = 0$ או $r_0 = (L^2/\mu k)^{1/4}$ אם מזיזים את המערכת בשיעור δ מנקודה זו מקבלים (בהצבת $r = r_0 + \delta$)

ב (2) והזנחת איברים $\mathcal{O}(\delta/r_0)^2$

$$(5) \quad \mu\ddot{\delta} = \frac{L^2}{\mu r_0^3} \left(1 - 3\frac{\delta}{r_0}\right) - k(r_0 + \delta),$$

ומהצבת r_0 ב (5) נקבל

$$(6) \quad \ddot{\delta} + \omega^2\delta = 0,$$

כאשר $\omega = 2\sqrt{k/\mu}$