88-113-תרגיל1-פתרון:

1. כתוב את התמורות הבאות כהרכבת מחזורים זרים ומתוכם כהרכבת חילופים. קבע את זוגיותן.

א.אי זוגית $\Leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 4 \quad 2)(3 \quad 5) = (4 \quad 2)(2 \quad 1)(3 \quad 5) \Rightarrow$

ב.זוגית $\Leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 4 \quad 6 \quad 3)(2 \quad 7) = (4 \quad 6)(6 \quad 3)(3 \quad 1)(2 \quad 7) \Rightarrow$

ע"מ 67:

1.1 תרגיל. תהא X קבוצה סופית. ותהא $f{:}X \to X$ פונקציה כלשהי. הוכח: f חד-חד ערכית $\Leftrightarrow$ f על.

תהי f חח"ע. נניח f איננה על, אזי קיים $y \in \{1,2,...,n\} = X$ כך של-y לא קיים מקור $x \in X$.
כלומר, הטווח(שזהה לתחום) מכיל ממש את קבוצת תמונות הפונקציה ולכן גדול ממש ממנה.
ממתמטיקה בדידה ידוע לנו שפונ' לטווח סופי אשר תחומה גדול מטווחה איננה חח"ע, בסתירה להנחה.

תהי f פונ' על. נניח f איננה חח"ע, אזי קיימים שני מקורות הנישלחים לאותה תמונה, אזי, קב' התמונות של הפונ' קטן ממש מתחומה, שהוא גם טווחה. אזי הפונ' לא מכסה את כל הטווח, בסתירה להנחה.

1.3 תרגיל. הכן רשימה של כל התמורות האפשריות ב S_3, והצג כל אחת מהן בשלש ההצגות האפשריות, כאשר בהצגה של פירוק למחזורים - כתוב את שתי הצורות האפשריות (המלאה, וזאת שאינה כוללת מחזורים מאורך אחד).

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \{(1)(2)(3), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (123), (132)\} = \{ID, (12), (13), (23), (123), (132)\} =$$
$$\{ID, (12), (13), (23), (12)(23), (13)(32)\}$$

1.4 תרגיל. א. הוכח שלכל שתי תמורות $\sigma, \tau \in S_n$, גם $\tau\sigma$ היא תמורה.

ב. הוכח שלכל תמורה $\sigma \in S_n$ מתקיים $\tau \mathrm{id} = \mathrm{id} \tau = \tau$.
(הכוונה כמובן לכל טאו ב Sn)

א.
σ, τ *תמורות ב*$S_n \Leftarrow$ $\sigma, \tau : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ *חח"ע ועל* $\Leftarrow$ *גם* $\tau\sigma : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$
וגם חח"ע ועל $\Leftarrow$ $\tau\sigma$ *גם תמורה ב* S_n

ב.

$$\forall \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

$$\tau id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ id(1) & id(2) & \dots & id(n) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau id(1) & \tau id(2) & \dots & \tau id(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} = \tau$$

$$id\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ id(1) & id(2) & \dots & id(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ id\tau(1) & id\tau(2) & \dots & id\tau(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} = \tau$$

1.11 תרגיל. מצא את הסימן של כל אחת מהתמורות המופיעות בתרגיל 1.3.

(כלומר של S_3)

$$sign(ID) = 1$$
$$sign((12)) = sign((13)) = sign((23)) = -1$$
$$sign((123)) = sign((132)) = 1$$

1.12 תרגיל. תהא $\sigma \in S_n$. הוכח: $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$. [רמז: לכל היפוך סדר $i<j \mapsto \sigma(i)>\sigma(j)$ של σ אפשר לקבל היפוך סדר של σ^{-1} בצורה הבאה: נסמן $i':=\sigma(i)$, $j':=\sigma(j)$. מתקיים:
$i'>j' \mapsto \sigma^{-1}(i')<\sigma^{-1}(j')$]

הוכחה דרך מס' החילופים:
ראינו שדרך אחת לבניית שרשרת החילופים השקולה לתמורה σ היא ע"י מציאת רצף ההחלפות בין זוגות המעביר אותנו מ- n . . . 2 1 לסדר הנדרש בתמורה: $\sigma(1)\ \sigma(2)...\sigma(n)$. ע"מ לבנות את σ^{-1} הרי שנעבור בדיוק את אותן החלפות אך בסדר הפוך ולכן מס' החילופים לא ישתנה,בעקבותיו זוגיות התמורה ולכן גם סימן התמורה ישמר