אלגברה לינארית 2

תרגיל 3 - פתרון

שאלה 1:

תהא $A\in F^{n\times n}$, הוכיחו כי $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\left|A_{ij}\right|=0$ לכל $i\neq k$.

הוכחה:

יהי $1\le i\neq k\le n$ נגדיר את $B\in F^{n\times n}$ כך ש- $b_{lj}=\begin{cases}a_{lj} & : l\neq i\\ a_{kj} & : l=i\end{cases}$, אזי $R_k(B)=R_i(B)=R_k(A)$. כלומר שורותיה ל B תלויות לינארית זו בזו ולכן היא אינה הפיכה, ובפרט $\det(B)=0$.

נפתח את דטרמיננטת B לפי השורה ה- i שלה: $\det(B)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}\left|B_{ij}\right|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\left|B_{ij}\right|$.

לכל $1\le j\le n$ המינור B_{ij} הוא בדיוק A_{ij} כי $\forall 1\le l\neq i\le n: R_l(B)=R_l(A)$ ולכן

$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\left|A_{ij}\right|=\det(B)=0$ *מש"ל*.

שאלה 2:

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}a & b & & 0\\ \ddots & a & \ddots & \\ & 0 & \ddots & b\\ b & & \ddots & a\end{pmatrix}\in F^{n\times n}$$

<u>הערה:</u> a באלכסון הראשי, b באלכסון מעליו, ו- b נוסף בפינה השמאלית.

<u>פתרון:</u>

$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i,1}\left|A_{i,1}\right|=a\left|A_{1,1}\right|+(-1)^{n+1}b\left|A_{n,1}\right|$. נחשב דטרמיננטה של כל מינור בנפרד:

$$\left|A_{1,1}\right|=\det\begin{pmatrix}a & b & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & b\\ & & & a\end{pmatrix}=a^{n-1},\left|A_{n,1}\right|=\det\begin{pmatrix}b & & & \\ a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b\end{pmatrix}=b^{n-1}.$$

לכן $\det(A)=a^n+(-1)^{n+1}b^n$.

שאלה 3:

תהא $A=\begin{pmatrix} z & \overline{z} & |z| \\ \overline{z} & z & |z| \\ \frac{1}{|z|} & \frac{1}{|z|} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $z \neq 0$.

א) מצא את $|A|$ ואת $adj(A)$.

ב) עבור אילו ערכי z המטריצה הפיכה.

ג) מצא את A^{-1} .

<u>הוכחה:</u>

א)
$$|A| = z^2+\overline{z}+\overline{z}-z-\overline{z}^2-z \underset{z=x+iy}{=} x^2+2ixy-y^2+2x-2iy-2x-2iy-x^2+2ixy+y^2$$
$$=4iy(x-1)$$

$$adj(A)=\begin{pmatrix} z-1 & 1-\overline{z} & |z|(\overline{z}-z) \\ 1-\overline{z} & z-1 & |z|(\overline{z}-z) \\ \frac{1}{|z|}(\overline{z}-z) & \frac{1}{|z|}(\overline{z}-z) & z^2-\overline{z}^2 \end{pmatrix}.$$

ב) A הפיכה $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)\neq 0 \wedge \operatorname{Re}(z)\neq 1$.

ג) נכתוב את $adj(A)$ בכתיב $z=x+iy$:

$$adj(A)=\begin{pmatrix} x-1+iy & 1-x+iy & \sqrt{x^2+y^2}(-2iy) \\ 1-x+iy & x-1+iy & \sqrt{x^2+y^2}(-2iy) \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-2iy) & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-2iy) & 4ixy \end{pmatrix},$$ ונחלק ב- $|A|$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{iy}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{iy}\right) & \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2(1-x)} \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{iy}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{iy}\right) & \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2(1-x)} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2(1-x)} & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2(1-x)} & \frac{x}{x-1} \end{pmatrix}$$

<u>שאלה 4:</u>

הוכח שלכל מטריצה $A\in F^{n\times n}$ משולשית עליונה גם $adj(A)$ משולשית עליונה.

<u>הוכחה:</u>

יהי $i>j$, ונסמן $B=adj(A)$, לכן צ"ל $b_{ij}=0$.

ובכן $b_{ij}=(-1)^{i+j}\left|A_{ji}\right|$. המינור A_{ji} הוא מטריצה משולשית עליונה עם 0 על האלכסון, ולכן $\left|A_{ji}\right|=0 \Leftarrow b_{ij}=0$. *מש"ל*

1.6 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

א. מצא את הערכים העצמיים של A. [רמז: בעזרת דטרמיננטה]

ב. מצא את המרחבים העצמיים של A.

פתרון:

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & 5 & \lambda-4 \end{pmatrix}\right|=\lambda(\lambda(\lambda-4)+5)+(-2)+0=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=\lambda^3-\lambda^2-3\lambda^2+3\lambda+2\lambda-2=$$

$$\lambda^2(\lambda-1)-3\lambda(\lambda-1)+2(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)\Rightarrow\lambda_{1,2,3}=1,2$$

$$(A-\lambda I)v_{1,2}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}=0\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{c} x_3=t \\ x_2=t \\ x_1=t \end{array}\Rightarrow v_{1,2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow v_{\lambda_{1,2}}=\left\{\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}\right\}$$

$$(A-\lambda I)v_3=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}=0\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{c} x_3=t \\ x_2=0.5t \\ x_1=0.25t \end{array}\Rightarrow v_3=\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow v_{\lambda_3}=\left\{\begin{pmatrix} 0.25t \\ 0.5t \\ t \end{pmatrix}\right\}$$

1.7 תרגיל. הוכח שלמטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ אין ערכים עצמיים.

פתרון:

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)^2+1=0$$

אבל זה ביטוי שתמיד גדול מאפס ולכן לא קיים λשמאפס את הפולינום האופייני. כלומר לא קיימים ערכים עצמיים.

1.9 תרגיל[!]. [מקור: תהליכים מקריים] **מטריצת מרקוב** היא מטריצה ריבועית, שסכום אברי כל עמודה שלה הוא 1. תהא A מטריצת מרקוב. הוכח שלמטריצה A^t יש ערך עצמי $\lambda=1$. מהו הוקטור העצמי המתאים?

תוצאת המכפלה $B\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ היא וקטור שהעמודה הi שלו היא סכום השורה הi של B. השורות של A^t הינן העמודות של A ולכן $A\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ כי הרי סכום כל עמודה של A הוא אחד. לכן הוקטור העצמי הוא $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ והערך העצמי הוא 1

1.12 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ותהא $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ ההעתקה של כפל במטריצה A משמאל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. v וקטור עצמי של A (המתאים לערך עצמי λ).

ב. v וקטור עצמי של T_A (המתאים לערך עצמי λ).

פתרון:

$$\forall (x_1 \quad \dots \quad x_n) \qquad T_A(x_1 \quad \dots \quad x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} v \text{ ו"ע של } A \\ \text{עם ע"ע } \lambda \end{matrix} \Leftrightarrow \exists v \neq 0, \lambda \in F : \lambda v = Av = T_A v \Leftrightarrow \begin{matrix} v \text{ ו"ע של } T_A \\ \text{עם ע"ע } \lambda \end{matrix}$$

<u>תזכורת- מטריצה נילפוטנטית:</u>

מטריצה נילפוטנטית מסדר i היא מטריצה ריבועית, A , כך ש: $A^i = 0 \wedge A^{i-1} \neq 0$.

1.15 תרגיל*. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה נילפוטנטית מסדר k.

א. מהם הערכים העצמיים של A ?

ב. הוכח (ללא בעזרת (ז)): $\alpha I - A$ הפיכה $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq 0$.

פתרון:

- א. A נילפוטנטית מסדר k לכן $A^{k-1} \neq 0$ וגם $A^k = 0$. נניח λ ע"ע של A. לכן $Av = \lambda v$ עבור איזה $v \neq 0$. נכפול ב A^{k-1} לקבל $0 = A^k v = \lambda^k v$ אבל $v \neq 0$ לכן $\lambda = 0$. אפס חייב להיות ערך עצמי של A מכיוון שאפס הוא ע"ע של כל מטריצה לא הפיכה (ובוודאי נילפוטנטית לא הפיכה). בסיכום, 0 ע"ע של A והוא יחיד.
- ב. $\alpha I - A$ הפיכה אם"ם $|\alpha I - A| \neq 0$ אם"ם α לא ע"ע של A אם"ם (לפי א') $\alpha \neq 0$.

קבוצת הערכים העצמיים של העתקה לינארית T נקראת **הספקטרום של** T, ומסומנת $\sigma(T)$. באופן דומה מגדירים את $\sigma(A)$ עבור מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

1.18 תרגיל. א. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: $\sigma(AB) = \sigma(BA)$. [רמז: $A(BA)v = (AB)Av$. יש לטפל בנפרד במקרה $Av = 0$]

ב. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: $\sigma(A) = \sigma(A^t)$. [רמז: בעזרת דטרמיננטה]

פתרון:

א.

$\underline{\underline{Av \neq 0}}: BA$ של ע"ע $\lambda \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : BAv = \lambda v \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : \mathbf{A}(BA)v = A\lambda v = \lambda Av$

$\Leftrightarrow \exists Av \neq 0 : (\mathbf{A}B)Av = \lambda Av \Leftrightarrow AB$ של ע"ע λ

$\underline{\underline{Av = 0}}: \Rightarrow BAv = 0 \Leftrightarrow BA$ של ע"ע $\lambda \Leftrightarrow |BA - 0I| = 0 \Leftrightarrow |BA| = 0 \Leftrightarrow |B||A| = 0 \Leftrightarrow |AB| = 0$

$\Leftrightarrow |BA - 0I| = 0 \Leftrightarrow AB$ של ע"ע λ

וכנ"ל בכיוון ההפוך

ב.

A של ע"ע $\lambda \Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$: λ פותר את הפולינום האופייני

$$\left(\begin{array}{l} \text{אבל:} \\ 0 = |\lambda I - A| = \left|(\lambda I - A)^t\right| = \left|(\lambda I)^t - (A)^t\right| = \left|\lambda I - (A)^t\right| \\ \text{ולכן:} \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow \left|\lambda I - (A)^t\right| = 0$: λ פותר את הפולינום האופייני $\Leftrightarrow A^t$ של ע"ע λ