# תורת המשחקים – שיעור 13

שידוכים יציבים

# שידוכים

- בסיום לימודי הרפואה, הבוגרים מתקבלים להתמחות בבתי חולים.
- לבוגרים יש סולם עדיפויות, וכך גם לבתי החולים.
- כיצד יתבצע השיבוץ? מהו שיבוץ "טוב"?
- הוקמה מערכת מרכזית, מי עשוי להתנגד לה?
- דוגמאות אמיתיות נוספות:
  - תרומת כליות.
  - שיבוץ ילדים לגנים.

# דוגמא – נשים וגברים

העדפות נשים

| | אלה | בר | גלית | דפנה |
|---|---|---|---|---|
| אהוד | 3 | 1 | 3 | 2 |
| בני | 1 | 3 | 2 | 1 |
| גונן | 4 | 2 | 4 | 3 |
| דני | 2 | 4 | 1 | 4 |

העדפות גברים

| | אלה | בר | גלית | דפנה |
|---|---|---|---|---|
| אהוד | 1 | 4 | 2 | 3 |
| בני | 3 | 1 | 4 | 2 |
| גונן | 1 | 4 | 3 | 2 |
| דני | 4 | 2 | 3 | 1 |

- נניח והגברים יחליטו:
  - אהוד וגלית, בני ובר, גונן ואלה, דני ודפנה
- האם הגברים מרוצים? האם הנשים מרוצות?
- האם זו נקודת המבט הנכונה?

# דוגמא – נשים וגברים

העדפות נשים

| | אלה | בר | גלית | דפנה |
|---|---|---|---|---|
| אהוד | 3 | 1 | 3 | 2 |
| בני | 1 | 3 | 2 | 1 |
| גונן | 4 | 2 | 4 | 3 |
| דני | 2 | 4 | 1 | 4 |

העדפות גברים

| | אלה | בר | גלית | דפנה |
|---|---|---|---|---|
| אהוד | 1 | 4 | 2 | 3 |
| בני | 3 | 1 | 4 | 2 |
| גונן | 1 | 4 | 3 | 2 |
| דני | 4 | 2 | 3 | 1 |

- אהוד וגלית, בני ובר, גונן ואלה, דני ודפנה
  - אהוד, מעדיף את אלה.
  - אלה, מעדיפה את אהוד.
  - יש שני גירושין, ונישואין מחדש.

# שידוכים יציבים

- הגדרה: שידוך נקרא **יציב** אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).
- האם קיים שידוך יציב?
- האם קיימים מספר שידוכים יציבים שונים?
- איך ניתן להשוות בין שידוכים יציבים שונים?

# אלגוריתם חיזור הגברים – גייל-שפלי

- נניח שיש לנו n גברים וm נשים.
- ביום הראשון, כל גבר ניצב בדלתה של בחירתו הראשונה.
- כל אישה משאירה את הגבר שהכי מעדיפה, ושולחת את האחרים לביתם.
- למחרת, כל גבר דחוי הולך לבחירתו הבאה, ושוב הנשים משאירות רק גבר אחד.
- לאחר שכל גבר נדחה בפעם האחרונה, האלגוריתם נגמר.

# אלגוריתם חיזור הגברים – גייל-שפלי

- האם האלגוריתם נגמר בשידוך **יציב**?
  - כן. נניח בשלילה שאהוד מעדיף את אלה, ואלה מעדיפה את אהוד.
  - אם אהוד מעדיף את אלה, סימן שהוא ביקר אצלה לפני בת הזוג הנוכחית שלו. (או שאהוד רווק, ונדחה על ידי אלה.)
  - כלומר אלה דחתה את אהוד עבור בן זוג עדיף (ואולי אחר כך אפילו בחרה במישהו עוד יותר טוב).
  - סתירה.
- נניח $n=m$ (מספר הגברים שווה למספר הנשים). האם האלגוריתם נגמר בשידוך לכולם?
  - כן. נניח בשלילה שיש אישה ללא בן זוג, סימן שאף גבר מעולם לא ביקר בביתה.
    כיוון שישנם $n$ גברים, סימן שיש גבר שכל הנשים דחו אותו, כולל האישה שלא ביקר, בסתירה.

# אלגוריתם חיזור הגברים – גייל-שפלי

העדפות נשים

| | אלה | בר | גלית | דפנה |
|---|---|---|---|---|
| אהוד | 3 | 1 | 3 | 2 |
| בני | 1 | 3 | 2 | 1 |
| גונן | 4 | 2 | 4 | 3 |
| דני | 2 | 4 | 1 | 4 |

העדפות גברים

| | אלה | בר | גלית | דפנה |
|---|---|---|---|---|
| אהוד | 1 | 4 | 2 | 3 |
| בני | 3 | 1 | 4 | 2 |
| גונן | 1 | 4 | 3 | 2 |
| דני | 4 | 2 | 3 | 1 |

- <u>יום ראשון</u>: אהוד וגונן באים לאלה, אהוד נשאר.
  בני הולך לבר ודני הולך לדפנה.
- <u>יום שני</u>: גונן הולך לדפנה, דפנה שולחת את דני לדרכו.
- <u>יום שלישי</u>: דני הולך לבר, ומיד חוזר הביתה.
- <u>יום רביעי</u>: דני הולך לגלית, ומתמקם.

# למי טוב אלגוריתם חיזור הגברים?

- משפט: אם גבר שודך לאישה באלגוריתם חיזור הגברים, זו האישה הכי עדיפה לו **בכל שידוך יציב**.

  הוכחה בשלילה:
  - נביט ביום הראשון בו גבר (נניח אהוד) נדחה על ידי אישה שדיכה לו (כלומר, שקיים שידוך יציב בו שניהם זוג), נקרא לה אלה.
  - אלה דחתה את אהוד עבור בני.
  - בני מעדיף את אלה, על פני כל אישה שדיכה אחרת, כיוון שלפי ההנחה, כל מי שדחתה אותו לפני אלה אינה שדיכה לו.
  - לכן בכל שידוך יציב, בני מעדיף את אלה.
  - בשידוך היציב בו אהוד ואלה יחדיו, בני מעדיף את אלה, ואלה מעדיפה את בני, סתירה ליציבות של השידוך.

# למי אלגוריתם חיזור הגברים פחות מוצלח?

- משפט: אם אישה שודכה לגבר באלגוריתם חיזור הגברים, זה הגבר הכי פחות עדיף לה **בכל שידוך יציב**.

  הוכחה:
  - נניח אהוד ואלה זוג בסוף אלגוריתם לשידוך הגברים.
  - אהוד מעדיף את אלה בכל שידוך יציב.
  - נניח בשלילה שבני שדיך לאלה, אך אלה מעדיפה את אהוד.
  - בשידוך היציב בין בני לאלה, אלה מעדיפה את אהוד, ואהוד מעדיף את אלה, בסתירה.

# רווקים/רווקות

- נניח שבשידוך מסויים גבר נותר רווק, האם יש לו תקווה לשיטת שידוך אחרת?
  - לא. הוכחה: נביט ברווקים באלגוריתם שידוך הגברים.
  - נניח בשלילה שאהוד רווק, אך אלה שדיכה לו.
  - אלה משודכת לבני, ולכן מעדיפה את בני על פני אהוד.
  - אלה היא השידוך הטוב ביותר עבור בני, ולכן בני מעדיף אותה בכל שידוך יציב.
  - לכן בשידוך היציב בין אהוד לאלה, אלה מעדיפה את בני, ובני מעדיף את אלה, בסתירה.
  - לכן מי שרווק באלגוריתם חיזור הגברים, רווק בכל שידוך. כיוון שמספר הרווקים קבוע, סימן שבכל שידוך יש בדיוק אותם הרווקים.

# רווקים/רווקות

- ואם הרווק ישנה את העדפותיו? יש סיכוי לשידוך?
  - לא. רווק נשאר רווק.
  - הוכחה: נניח אהוד הרווק שינה את העדפותיו.
  - אלגוריתם חיזור הנשים אינו מושפע מהעדפותיהם של הרווקים, כיוון שאף אישה אינה מבקרת אותם. אם אישה הייתה מבקרת אותם, הם לא היו רווקים בסוף האלגוריתם.
  - לכן אוהד רווק בשידוך המתקבל מאלגוריתם חיזור הנשים, ולכן רווק בכל שידוך.

# מה יהיה עם ההטרונורמה?

- נניח וכולם יכולים להיות משודכים לכולם. האם בהכרח יש שידוך יציב?

# מה יהיה עם ההטרונורמה?

- נניח וכולם יכולים להיות משודכים לכולם. האם בהכרח יש שידוך יציב?

| | אביה | בר | גל | דקל |
|---|---|---|---|---|
| אביה | | 1 | 2 | 3 |
| בר | 2 | | 1 | 3 |
| גל | 1 | 2 | | 3 |
| דקל | 1 | 3 | 2 | |

העדפות בשורות:

- ישנם שלושה שידוכים אפשריים:
  - אביה-בר; גל-דקל (בר וגל יפרקו את השידוך)
  - אביה-גל; בר-דקל (אביה ובר יפרקו את השידוך)
  - אביה-דקל; בר-גל (אביה וגל יפרקו את השידוך)

# בעיית ההשמה

- נניח יש לנו $n$ עובדים ו$n$ עבודות, וכל עובד מוכשר ברמה מסוימת לעבודה מסוימת.

| | אופה | בלש | גנן | דייג |
|---|---|---|---|---|
| אביה | 4 | 1 | 2 | 3 |
| בר | 4 | 2 | 4 | 3 |
| גל | 1 | 2 | 3 | 4 |
| דקל | 4 | 4 | 4 | 4 |

- נרצה לשבץ את העובדים כך שתתבצע העבודה הטובה ביותר בסה"כ (סכום מינימלי של המספרים).
- אין לנו עניין ביציבות, יש בוס אחד שקובע.

# בעיית ההשמה

- היינו שמחים למצוא שיבוץ בו כל עובד עוסק בעבודה בה אין אחר טוב ממנו, אך לא בהכרח קיים שיבוץ כזה.
- חיסור a מכל התאים בשורה מסוימת, יחסר בדיוק a מכל סכום שיבוץ.

  לכן העובדים בשיבוץ האידיאלי לאחר הפעולה הזו, הינם אותם העובדים האידיאלים לעבודה המקורית.
- באמצעות חיסורים כאלה, נייצר מטריצה בה ניתן לשבץ כל עובד בעבודה האידיאלית שלו.

  (תמיד אפשרי, ללא הוכחה.)

# בעיית ההשמה

| | אופה | בלש | גנן | דייג |
|---|---|---|---|---|
| אביה | 4 | 1 | 2 | 3 |
| בר | 4 | 2 | 4 | 3 |
| גל | 1 | 2 | 3 | 4 |
| דקל | 4 | 4 | 4 | 4 |

| | אופה | בלש | גנן | דייג |
|---|---|---|---|---|
| אביה | 4 | 1 | 2 | 3 |
| בר | 3 | 1 | 3 | 2 |
| גל | 1 | 2 | 3 | 4 |
| דקל | 2 | 2 | 2 | 2 |

- כעת אנו רואים כי אביה הוא הגנן, בר הוא הבלש, גל הוא האופה ודקל הוא הדייג.
- ייתכנו שיבוצים נוספים, עם אותו סכום בדיוק.
- האלגוריתם המלא נקרא *האלגוריתם ההונגרי*.