

# אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 1

להגשה עד 6.11.19

## שאלה 1

לכל קבוצה  $E \subseteq \mathbb{R}$  ו- $a, b \in \mathbb{R}$  נגדיר את הקבוצה  $aE + b = \{ax + b | x \in E\}$ . הוכיחו כי

$$m^*(aE + b) = |a|m^*(E)$$

## שאלה 2

תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה. הוכיחו או הפריכו:

1. אם  $A$  חסומה אז  $m^*(A) < \infty$ .

2. אם  $m^*(A) < \infty$  אז  $A$  חסומה.

## שאלה 3

נאמר שקבוצה  $S \subseteq \mathbb{R}$  היא מטיפוס  $G_\delta$  אם ניתן להציג אותה כאיחוד בן-מניה של קבוצות פתוחות. תהי  $E \subseteq \mathbb{R}$ . הוכיחו שקיימת קבוצה  $S \in G_\delta$  עבורה מתקיים:  $E \subseteq S$ , וכן  $m^*(S) = m^*(E)$ .

**הזרקה:** השתמשו בהגדרה של מידה חיצונית והוכיחו שלכל קבוצה  $E \subseteq \mathbb{R}$  ולכל  $\varepsilon > 0$ , קיימת קבוצה פתוחה  $O$  המקיימת  $m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$ . לאחר מכן בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות כאלו, וחיתכו אותן.

## שאלה 4 (רשות)

תהא  $E \subset \mathbb{R}$  המקיימת  $0 < m^*(E) < \infty$ . הוכיחו כי לכל  $\varepsilon \in (0, 1)$  קיים קטע פתוח  $I \subset \mathbb{R}$  כך ש:  $m^*(E \cap I) \geq \varepsilon m^*(I)$ .