המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 05 222 - 88 – סמסטר ב' תשע"ט, 03.07.19 מבחן מועד א'
מרצה: מיכאל מגרל מתרגלת: תמר בר-און

הנחיות:

- יש **לבחור 4 מתוך 5** שאלות. נא לסמן על דף ראשון פנימי מספר תרגיל **שלא בחרתם**.
- כל שאלה שווה 25 נקודות. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות. הציון הסופי לא יעבור את 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, טלפון נייד או מחשבון.
- משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

תשובות ופתרון מקוצר:

.1

א. הוכיחו שמרחב מטרי $(\mathbb{Z}, d_5)$ הוא חסום כליל, לא קשיר ולא קומפקטי.

ב. הוכיחו שהגרף $Gr(f) = \{(\mathrm{x}, \mathrm{f(x)}) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y} : \mathrm{x} \in \mathrm{X}\}$ של פונקציה רציפה $f : X \to Y$ (בין מרחבים טופולוגיים) הומיאומורפי למרחב X.

פתרון:

א.

לא שלם: (שאלה 1.11 מאוסף תרגילים "Selected exercises") לכן לא קומפקטי.

לא קשיר: כי יש קבוצה סגוחה לא טריוויאלית: בעצם כל כדור פתוח ב $(\mathbb{Z}, d_5)$ (למשל $\mathrm{B}(0, \frac{1}{5})$) קבוצה סגוחה.

חסום כליל: לכל $\varepsilon \geq \frac{1}{5^k}$ קבוצה סופית $\{0,1,2,\cdots,5^{k+1}-1\}$ היא ε-צפופה ב $(\mathbb{Z}, d_5)$.

ב. שאלה 3.3 מאוסף תרגילים "Selected exercises".

.2

א. במרחב מטרי $(1,\infty)$ למצוא כיסוי פתוח ללא מספר לבג.

ב. בקו סורגנפראי $\mathbb{R}_s$ חשבו שפה $\partial(A)$ של תת קבוצה הבאה

$$A = \{-\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup (3,4) \cup \{\tfrac{7n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

תזכורת:תת קבוצה U של $\mathbb{R}$ פתוחה בטופולוגית סורגנפראי אם

$$x \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\, [x, x+\varepsilon) \subseteq U$$

פתרון:

א. היה בהרצאות עבור $(0,1)$. הפתרון עבור $(1,\infty)$ מאוד דומה.

לכיסוי פתוח $\{(\frac{n+1}{n}, \infty) : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ אין מספר לבג.

שימו לב שלכל $\delta > 0$ כדור פתוח $\mathrm{B(a,r)}$ עם $a = 1 + \frac{\delta}{2}, r = \frac{\delta}{2}$

מקיים

$$\mathrm{B(a,r)} = (1, 1+\delta) \not\subset (\tfrac{n+1}{n}, \infty) \quad \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}.$$

ב.

$$\mathrm{cl(A)} = cl(\{-\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}) \cup cl((3,4)) \cup cl(\{\tfrac{7n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\})$$

$$= \{-\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [3,4) \cup \{\tfrac{7n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{7\}$$

$$\mathrm{int(A)} = (3,4)$$

$$\partial(A) = cl(A) \setminus \mathrm{int(A)} = \{-\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3\} \cup \{\tfrac{7n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{7\}$$

3.

א. נניח X מרחב טופולוגי האוסדורפי וקומפקטי מקומית. הוכיחו שקיים מרחב קומפקטי האוסדורפי K ושיכון טופולוגי $i: X \to K$.

ב. במרחב טופולוגי $X := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=4\}$ נגדיר יחס שקילות: $(x,y,z) \sim (a,b,c)$ אם"ם $x=a, y=b$. תארו מרחב המנה $X/\sim$.

פתרון:

א. שיעורי בית 9 שאלה 2.

ב. היה בתירגול כמעט עם אותו ניסוח (עם $x^2+y^2+z^2=1$).

4.

א. משפט ההפרדה: נניח X מרחב האוסדורפי. הוכיחו שלכל זוג של תת קבוצות קומפקטיות זרות ב X יש סביבות זרות.

ב. נניח X הוא מרחב טופולוגי בעל תכונת מנייה שנייה B_2. הוכיחו שלכל כיסוי פתוח ב X יש תת כיסוי בן מנייה.

פתרון:

א. הרצאות

ב. שיעורי בית 7 שאלה 6 א.

5.

א. משפט: קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

ב. נניח A_i תת קבוצה סגורה לא ריקה במרחב טופולוגי X_i לכל $i \in I$. הוכיחו שתת קבוצה $\prod_{i\in I} A_i$ סגורה במרחב המכפלה $\prod_{i\in I} X_i$.

פתרון:

א. הרצאות.

ב. שיעורי בית 9 שאלה 2.

<u>שאלת בונוס</u> (5 נקודות):

נגדיר תת מרחבים הבאים של המישור

$$X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1\}$$

$$\mathrm{Y} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 5\}$$

הוכיחו או הפריכו: X ו Y הם מרחבים הומיאומורפיים.

פתרון:

במרחב Y יש "נקודה מחלקת". למשל $(2,0)$. למרחב X אין נקודה מחלקת.

מספר של קבוצת נקודות מחלקות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.