המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 88 - 222 05 – סמסטר ב' תשע"ט, 05.08.19 מבחן מועד ב'

מרצה: מיכאל מגרל מתרגלת: תמר בר-און

הנחיות:

- יש **לבחור 4 מתוך 5** שאלות. נא לסמן על דף ראשון פנימי מספר תרגיל **שלא בחרתם**.
- כל שאלה שווה 25 נקודות. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות. הציון הסופי לא יעבור את 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, טלפון נייד או מחשבון.
- משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

תשובות ופתרון מקוצר:

1.

א. משפט: הוכיחו שבמרחב מטרי (X,d) תת קבוצה לא ריקה A היא סגורה אם ורק אם היא קבוצת אפסים של פונקציה רציפה ממשית $f:X\to\mathbb{R}$ חסומה.

ב. הוכיחו שכל קבוצה סגורה A במרחב מטרי X היא שווה לחיתוך $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ בן מנייה של קבוצות פתוחות O_n כך ש $cl(O_{n+1})\subseteq O_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

פתרון:

א. הרצאות.

ב. על פי סעיף א קיימת פונקציה רציפה $f:X\to\mathbb{R}$ כך ש $A=f^{-1}(0)$.

בממשיים ניקח $\{0\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ כאשר $U_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$. אז $cl(U_{n+1})\subseteq U_n$.

נגדיר $O_n:=f^{-1}(U_n)$. אז $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. בגלל הרציפות $O_n=f^{-1}(U_n)$ פתוחות.

וגם $cl(O_{n+1})\subseteq O_n$.

בצורה מפורטת יותר: $O_{n+1}=f^{-1}(U_{n+1})\subseteq f^{-1}(cl(U_{n+1}))$. מכאן נקבל

$$cl(O_{n+1})\subseteq cl(f^{-1}(cl(U_{n+1})))=f^{-1}(cl(U_{n+1}))\subseteq f^{-1}(U_n)=O_n$$

2.

א. במרחב $\mathbb{R}^3$ נגדיר יחס שקילות $(x,y,z)\sim(a,b,c)\Leftrightarrow x=a$.

תארו מרחב המנה $\mathbb{R}^3/\sim$.

ב. תנו דוגמה של תת מרחב X ב $\mathbb{R}^3$ כך ש X קשיר מקומית עם 3 מרכיבי קשירות ו X תת קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

א. התשובה היא מרחב המנה $\mathbb{R}^3/\sim$ הומיאומורפי ל $\mathbb{R}$. יש להשתמש בהטלה שהיא פונקציה רציפה על ופתוחה (אז מנה).

ב. ניקח במרחב $\mathbb{R}^3$ תת מרחב שמורכב משלושה כדורים פתוחים זרים.

כדור פתוח הומיאומורפי למרחב $\mathbb{R}^3$ עצמו. זה עוזר להוכיח שיש קשירות מקומית.

.3

א. בקו סורגנפראי $\mathbb{R}_s$ חשבו מרכיב קשירות של הנקודה 0 והוכיחו שתת קבוצה $[0,1]$ היא לא קומפקטית.

תזכורת: תת קבוצה U של $\mathbb{R}$ פתוחה בטופולוגית סורגנפראי אם

$x\in U\Rightarrow \exists\varepsilon>0\,[x,x+\varepsilon)\subseteq U$.

ב. משפט האלומות: נניח X מרחב טופולוגי, $i\in I$ Y_i אוסף תת קבוצות קשירות כך שהחיתוך $\bigcap_{i\in I}Y_i$ לא ריק ו $X=\bigcup_{i\in I}Y_i$. הוכיחו ש X מרחב קשיר.

פתרון:

א. המרכיב של הנקודה 0 היא הנקודה עצמה:

נניח בשלילה שיש תת קבוצה קשירה A שמכילה את 0 וגם נקודה נוספת a. אם $a<0$ אז לתת מרחב A יש פירוק טופולוגי

$A=A_1\coprod A_2$. כאשר $0\in A_2:=[0,\infty)\cap A$, $\quad \mathrm{a}\in \mathrm{A}_1:=(-\infty,0)\cap A$

(קבוצות פתוחות וזרות לא ריקות של A).

במקרה של $a>0$ ניקח $a\in A_2:=[\mathrm{a},\infty)\cap A$, $\quad 0\in \mathrm{A}_1:=(-\infty,\mathrm{a})\cap A$.

תת קבוצה $[0,1]$ היא לא קומפקטית:

שימו לב שכיסוי פתוח הבא $\{[0,\frac{n-1}{n}),\{1\}:\mathrm{n}\in\mathbb{N}\}$

הוא ללא תת כיסוי סופי.

הערה: $\{1\}=[1,2)\cap[0,1]$ פתוח בתת מרחב $[0,1]$.

ב. הרצאות.

.4

א. תנו דוגמה של מרחב טופולוגי שהוא T_2 אבל לא T_3.

ב. על קבוצת ממשיים $\mathbb{Z}$ נגדיר $O_n:=\{n,n+1,\cdots\}$ $\quad \tau=\{O_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{\varnothing,\mathbb{Z}\}$.

הוכיחו: $(\mathbb{Z},\tau)$ מרחב טופולוגי והוא לא מטריזבילי.

פתרון:

א. מרחב Smirnov דיברנו על זה בהרצאות.

ב. שיעורי בית 4 שאלה 4

לא מטריזבילי – אפשר לבדוק בהרבה דרכים גם דרך שיעורי בית 4 שאלה 4 סעיף ב -- שיש סדרה ששואפת לכל איבר – אין יחידות הגבול.

.5

א. הוכיחו שמרחב קומפקטי מטריזבילי הוא : ספרבילי ועוצמתו לא יותר מעוצמת ממשיים.

ב. נניח $f_2 : X \to Y$ $f_1 : X \to Y$ פונקציות רציפות ממרחב טופולוגי X לתוך מרחב Y האוסדורפי. קיימת תת קבוצה צפופה A ב X כך ש $f_1(a) = f_2(a)$ לכל $a \in A$. הוכיחו ש $f_1 = f_2$.

פתרון:

א. *ספרביליות:* אפשר להוכיח בקלות חסימות כליל וממנה לקבל ספרביליות.

העוצמה של X היא לא יותר מעוצמת ממשיים:

על פי הספרביליות יש תת קבוצה A בת מנייה צפופה ב X.

לכל $x \in X$ קיימת סדרה $a_n \in A$ שהיא שואפת ל x. בגלל יחידות הגבול במרחב מטריזבילי עוצמת X היא לא יותר מעוצמת $\mathrm{P}(A)$. לכן $|X| \le 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$.

ב. (שאלה 2.17 באוסף תרגילים "Selected exercises")

נניח בשלילה שקיים $z \in X$ כך ש $f_1(z) \neq f_2(z)$. המרחב Y הוא האוסדורפי. לכן קיימות סביבות פתוחות זרות $U \in N(f_1(z)),\ V \in N(f_2(z))$. בגלל הרציפות של הפונקציות $O_1 := f_1^{-1}(U) \in N(z),\ O_2 := f_2^{-1}(V) \in N(z)$ גם סביבות פתוחות. בגלל הצפיפות של A ב X קיימת נקודה $a \in A \cap O_1 \cap O_2$. אז $f_1(a) \neq f_2(a)$ (כי $U \cap V = \varnothing$). סתירה !

<u>שאלת בונוס</u> (5 נקודות):

נניח X מרחב האוסדורף וקומפקטי מקומית. הוכיחו שלכל נקודה $a \in X$ ולכל קבוצה סגורה Y ב X עם $a \notin Y$ קיימת פונקציה רציפה $f : X \to [0,1]$ כך ש $f(Y) = 1, f(a) = 0$.

פתרון:

הרעיון המרכזי כאן קומפקטיפיקציה חד-נקודתית $i : X \subset X \cup \{\infty\}$ (שהייתה בשיעורי בית).

מספיק להוכיח ש $X \in T_{3.5}$. התכונה $T_{3.5}$ היא תורשתית לכן מספיק להוכיח ש X משוכן כתת מרחב טופולוגי לתוך מרחב טופולוגי K עם תכונת $T_{3.5}$. ניקח $\mathrm{K} := X \cup \{\infty\}$ שהוא T_4 (כקומפקטי האוסדורפי) ולכן גם $T_{3.5}$.