

תרגילי בית 6+7 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית 88-373 סמסטר ב' תשפ"א

הפונקציה האופיינית

תרגיל 1. חשבו את הפונקציה האופיינית של ההתפלגויות הבאות:

א. $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

ב. $X \sim \text{NB}(r, p)$ (התפלגות בינומית שלילית).

תרגיל 2. נגדיר משתנה מקרי רציף X על $(0, \infty)$ לפי פונקציית הצפיפות

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

כאשר פונקציית גמא מוגדרת לפי

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

להתפלגות הזו קוראים **התפלגות גמא** עם פרמטרים $\alpha, \beta > 0$, ומסמנים $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.
הוכיחו כי $\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{\beta}{it}\right)^{-\alpha}$.

תרגיל 3. יהי X משתנה מקרי שעבורו $\varphi_X(t)$ גזירה $2n$ פעמים. הוכיחו כי המומנט ה- $2n$ -י של X סופי.
(רמז: התבוננו ב- $\varphi_X(2h) - 2\varphi_X(0) + \varphi_X(2h)$.)

משפט הגבול המרכזי

תרגיל 4. בכל יום קרול הטרול מטיל שוב ושוב את מטבע המזל שלו עד שהוא מקבל "עץ", ורק אז הוא מתפנה לסידורים האחרים של אותו היום. כידוע, טרולים הם מאוד סבלנים כשזה מגיע להטלות מטבע, ככה שהוא מוכן להמשיך עד שהוא מטיל "עץ" (לא מתחלף היום עד שזה לא קורה), ובסיום הוא רושם לעצמו ביומן כמה פעמים היה צריך להמשיך עד שזה קרה. יום אחד חשד קרול הטרול שחד הגמד החליף לו מימים ימימה את המטבע במטבע לא הוגן. קרול הטרול מחליט לחשב את ממוצע ההטלות שלו X ב-1000 הימים האחרונים, ולהשוות את זה להתפלגות הצפויה. הוא קיבל את התוצאה 1.99.

א. האם קרול הטרול צריך לדאוג? (הוא ידאג אם $P(X \leq 0.499) < 0.1$)

ב. ומה אם היה מדובר בממוצע לאחר 100000 ימים?

תרגיל 5. חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}\right) dx_1 \cdots dx_n$$

תרגיל 6. חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} x_1 \cdots x_n dx_1 \cdots dx_n$$

כאשר

$$A_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n \mid 3(x_1 + \cdots + x_n) > 2n + \sqrt{n}\}$$

(רמז: החלפת משתנים $y_i = x_i^2$)

תוחלת מותנית

תרגיל 7. מטילים פעמיים מטבע שהסיכוי שלו ליפול על "עץ" הוא p . נסמן על ידי Ω את מרחב המדגם של כל ההטלות האפשריות, ויהי Y המשתנה המקרי המייצג את כמות הפעמים שיצא "עץ".

א. מהי $\sigma(Y)$?

ב. תהי $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{(עץ, עץ), (עץ, פלי)\}, \{(פלי, עץ), (פלי, פלי)\}, \Omega\}$ תת- σ -אלגברה. חשבו את התוחלת המותנית $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_1]$.

ג. ודאו כי $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_1]] = \mathbb{E}[Y]$.

תרגיל 8. יהיו X_1, X_2, \dots ממבתש"ה עם תוחלת סופית, ויהי N משתנה מקרי בעל תוחלת סופית המקבל ערכים ב- \mathbb{N} . הוכיחו כי $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_1]$.

תרגיל 9. יהיו $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ותהי $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ תת- σ -אלגברה. הוכיחו כי

$$\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \cdot Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]]$$

בהצלחה!