

מבחן מועד א' בקורס 82-218 תשפ"א

תורת החבורות

מרצים: בארי גרינפלד ותומר באואר
מתרגלת: תמר בר-און

הוראות

1. **משך המבחן** הוא שעתיים, ועוד עשר דקות לסריקה והעלאה של התשובות.
2. **הניקוד** הסופי של השאלות יהיה 35, 30, 25 ו-10 נקודות מן התשובה הטובה ביותר שלכם לפחות טובה.
3. **חומר העזר** הוא לכל היותר שני דפים של טקסט כתוב או מודפס שאתם הכנתם מראש. כלומר אין להשתמש בטלפון, במחשבון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר. הציגו למשגיחים את כל חומר העזר שלכם לפני תחילת המבחן.
4. כתבו את הפתרון לכל שאלה **בדף נפרד** ונמקו אותו היטב.
5. כתבו בעט כחול או שחור באופן ברור.
6. **אין להשתמש במחשב** במהלך המבחן פרט לצפייה בטופס ולהגשת הפתרון.
7. **מהלך המבחן יוקלט** בתוכנת זום. יש לכוון לפחות מצלמה אחת כך שבשדה הראייה של המצלמות רואים את הדפים שלכם, הפנים והידיים שלכם. שימו לב שהמבחן מוקלט ונקפיד על שמירה על טוהר הבחינות.
8. לשאלות במהלך המבחן סגל הקורס יעבור בין החדרים ותועברו לחדר זום פרטי. הודיעו למשגיחים לפני שימוש במחשב במקרה הצורך. לתקלות טכניות שלחו אימייל למרצים.
9. בשאלות שבהן התשובה הסופית היא מספר או נוסחה סגורה אין להשתמש עבודה בסימן הסכום \sum , סימן המכפלה \prod או שלוש נקודות.
10. מותר לצטט ללא הוכחה כל טענה שהוכחנו בהרצאה. החומר למבחן הוא בחיתוך החומר של שתי קבוצות ההרצאה.

עצות בכתובה הנה כמה נקודות שכדאי לדעת כאשר אתם עונים על המבחן:

1. ניתן לפתור את המבחן ללא שום דף נוסחאות.
2. בכתבת פתרון אתם צריכים להעביר את הידע שלכם מן הראש אל הדף. זה לא מספיק לדעת או להבין מה צריך להיות הפתרון לשאלות, אלא גם לתקשר את הידע וההבנה האלו.
3. חלקו את זמנכם בתבונה. נסו לעבור על כל השאלות ולכתוב טיוטה מהירה לרעיון הראשוני של דרך הפתרון, ואז כתבו פתרון מלא לשאלות שאתם יודעים לענות עליהן.
4. אנחנו לא קוראי מחשבות, ולכן אתם צריכים לכתוב את מה שאתם רוצים שנדע, ורק את מה שרלוונטי לפתרון. כתבו בכתב מסודר, עם משפטים מלאים ועם נימוקים והסברים לכל מה שדרוש נימוק או הסבר. כאשר משתמשים בביטויים כמו "קל לראות...", "ברור ש...", "מסיקים מייד כי...", אז צריך להוכיח את הדברים האלו. זה הרי צריך להיות קל, ברור ומייד.
5. לשאלה מסויימת יכולים להיות כמה פתרונות נכונים שונים. מצד שני, יכולים להיות לה גם הרבה פתרונות שגויים שונים. לפעמים אחד מהפתרונות הנכונים הוא יותר פשוט, או יותר קצר, או דומה למה שראינו בכיתה מאשר שאר הפתרונות. זה בסדר גמור לענות עם פתרון אחר, ובכל מקרה צריך להראות שהוא נכון ולא שגוי.

שאלות

שאלה 1. חשבו את הסדר של החבורה $\text{Aut}(\mathbb{Z}_7 \times \text{Aut}(\text{Aut}(\mathbb{Z}_7)))$.

שאלה 2. יהי p מספר ראשוני. תהי $H \leq G$ תת-חבורה פתירה מאינדקס p^2 . הוכיחו כי המנרמל $N_G(H)$ הוא חבורה פתירה.

שאלה 3. תזכורת: פעולה היא נאמנה אם בתור הומומורפיזם היא חח"ע.

א. (5 נק') תהי G חבורה מסדר n ותהי H חבורה מסדר m . הוכיחו כי $G \times H$ פועלת באופן נאמן על קבוצה בגודל $n + m$.

ב. (20 נק') תהי G חבורה מסדר $16 = 2^4$. הוכיחו שאם היא פועלת באופן נאמן על קבוצה בגודל 6, אז $G \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2$.

שאלה 4. תהי G חבורה סופית הפועלת על קבוצה סופית לא ריקה X . יהי p מספר ראשוני. נסמן את הקבוצה

$$E = \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{Z}_p\}$$

של כל הפונקציות מהקבוצה X לקבוצה \mathbb{Z}_p (לא מדובר בהומומורפיזמים, כי X אינה חבורה). נגדיר פעולה של G על הקבוצה E לפי $f * g(x) = f(g.x)$. אין צורך להוכיח שזו פעולה¹.

א. (10 נק') הוכיחו כי לכל $g \in G$ קיים $m \geq 1$ טבעי עבורו גודל הקבוצה $\text{Fix}_E(g)$ (או E^g בסימון קבוצת ההרצאה ביום ראשון) של נקודות השבת ביחס ל- g הוא p^m . רמז: התבוננו במסלולים בפעולה של $\langle g \rangle$ על X .

ב. (15 נק') נניח שהסדר של G זר ל- p . הוכיחו כי מספר המסלולים בפעולה של G על E מתחלק ב- p .

בהצלחה!

¹שימו לב כי סימנו את הפעולה של איבר $g \in G$ על איבר $x \in X$ בסימון $g.x$ ואת הפעולה של איבר $g \in G$ על פונקציה $f \in E$ בסימון $f * g$.