ב"א אנליזה 1 תשעח מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x-1)}{e^x \ln(1+x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x-1)}{e^x \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x-1)}{e^x-1} \cdot \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{1}{e^x} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \frac{x}{x}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

(ב) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$

פתרון: בעזרת כפל ב"צמוד" מתקיים:

$$\frac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\left(\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)}{x} \cdot \frac{\left(\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \frac{3x^2+x}{x\left(\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{x^2}{x^2} \frac{\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

המעבר האחרון מתבסס על ההנחה ש $x>0$ (כי $x\to\infty$) ולכן

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3+0}{\sqrt{4+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{3}{2+1} = 1$$

(ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n!}}{3^n}$

פתרון: לכל $n>3$ מתקיים

$$\frac{2^{n!}}{3^n} = \frac{2^{2\cdot 3\cdots n}}{3^n} = \frac{\left(2^2\right)^{3\cdots n}}{3^n} \geq \frac{\left(2^2\right)^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$$

ולכן, לפי חצי סנוויץ $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n!}}{3^n} = \infty$.

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-\cos(x)}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?
פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x} = a$$

מתקיים

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}, \text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x)}{1} = 1$$

ולכן רק עבור $a=1$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?
פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=1$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=0$) אם f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - \cos(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}, \text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - 1}{2x} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}, \text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos(x)}{2} = 1$$

כלומר $f'(0)$ קיימת וסופית ומתקיים $f'(0) = 1$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ וכן נתון $a_1 > 0$.

(א) הוכיחו כי הסדרה עולה.
פתרון: טענה: הסדרה חיובית. נוכיח באינדוקציה כי $a_n > 0$:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1 > 0$.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $a_n > 0$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1} > 0$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = a_n\left(2 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

כעת, לכל n טבעי, לפי הגדרה $a_{n+1} = a_n\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ ולכן

$$a_{n+1} - a_n = a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

ולכן $a_{n+1} \geq a_n$ כנדרש.

(ב) וחשבו את גבול הסדרה $\lim_{n\to\infty} a_n$.
פתרון: הוכחנו שהסדרה עולה. **אם** הסדרה חסומה מלמעלה אז היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו L, כלומר $a_n \to L$

ולכן גם $a_{n+1} \to L$. מהגדרת הסדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = a_n \left(2 + \frac{1}{n}\right) \to L\,(2+0) = 2l$$

ולכן $L = 2L$. ולכן $L = 0$ אבל הסדרה עולה ולכן $a_n \geq a_1 > 0$ ולכן $L \geq a_1 > 0$. סתירה. לכן הסדרה אינה חסומה מלמעלה והגבול שלה הוא ∞.

.4

(א) מצאו את הערך המינמאלי של הפונקציה $f(x) = e^x - x - 1$.
פתרון: נגזור

$$f'(x) \quad = \quad e^x - 1$$

ולכן f' מתאפסת רק ב $x = 0$ ומוגדרת בכל $\mathbb{R}$. בנוסף, לפי הטבלה

x	-1	0	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$

נסיק שהפונקציה f יורדת בקרן $(-\infty, 0)$ ועולה בקרן $(0, \infty)$ ולכן 0 הוא נקודת מינימום מוחלט של f והערך בו הוא $f(0) = e^0 - x - 1 = 0$.

(ב) יהא $a \in \mathbb{R}$. כמה פתרונות יש למשוואה $2e^x = x^2 + 2x + a$?
פתרון: נגדיר פונקציה

$$g(x) = 2e^x - \left(x^2 + 2x + a\right)$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$g'(x) = 2e^x - (2x + 2) = 2\left(e^x - x - 1\right)$$

ו $g' = 0$ אמ"מ $e^x - x - 1 = 0$ את $f(x) = e^x - x - 1$ חקרנו בסעיף קודם וגילנו ש 0 נקודת מינימום של f והערך בה הוא 0. לכן לכל x מתקיים

$$f(x) \geq f(0) = 0$$

ולכן $g' \geq 0$ ולכן g עולה בכל $\mathbb{R}$ ולכן יש לה לכל היותר שורש אחד. בנוסף מתקיים כי

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2e^x - \left(x^2 + 2x + a\right) = \{0 - \infty\} = -\infty$$

כי

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + 2x + a\right) = \lim_{x \to -\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{a}{x^2}\right) = \{\infty \cdot (1 + 0 + 0)\} = \infty$$

ובנוסף

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} 2e^x - \left(x^2 + 2x + a\right) = \lim_{x \to \infty} e^x \left[2 - \frac{\left(x^2 + 2x + a\right)}{e^x}\right] = \{\infty \cdot (2 - 0)\} = \infty$$

כי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x+a)}{e^x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+2)}{e^x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

ולכן קיימים $c<0,d>0$ כך ש $f(c)<0,f(d)>0$. בקטע $[c,d]$ הפונקציה f מחליפה סימן ורציפה ולכן לפי משפט ערך הביניים חותך את ציר x, כלומר יש לה שורש בקטע זה. לסיכום: ל f יש לכל היותר שורש אחד וקיים לה שורש אחד ולכן יש לה בדיוק שורש אחד.

5. תהא פונקציה f כך שבכל הממשיים $f''>0$ וכמו כן $f'(0)=1$.

(א) הוכיחו שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)\geq x+f(0)$.
פתרון: לפי משפט לגרנז', לכל $x>0$, בקטע $[0,x]$ הפונקציה f רציפה (כי גזירה) ולכן קיימת $0<c<x$ כך ש

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(c)$$

מהנתון $f''>0$ נסיק ש f' עולה בכל הממשיים ולכן

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(c)\geq f'(0)=1$$

ומכאן ש $f(x)-f(0)\geq x$ נעביר אגף ונקבל $f(x)\geq x+f(0)$ כנדרש.

(ב) חשבו את $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-\frac{x}{2}$.
פתרון: לפי סעיף קודם

$$\lim_{x\to\infty}f(x)-\frac{x}{2}\geq\lim_{x\to\infty}(x+f(0))-\frac{x}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}+f(0)=\infty$$

ולכן לפי חצי סנדוויץ' גם $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-\frac{x}{2}=\infty$.