מתמטיקה מד"ר תשפג מועד ב

1. מצאו פתרון למד"ר $x^2y'+xy+1=0$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: אחרי חילוק ב x^2 והעברת אגף נקבל

$$y'+\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x^2}$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $a(x)=\frac{1}{x}, b(x)=-\frac{1}{x^2}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב

$$A(x)=\int a(x)\mathrm{dx}=\int \frac{1}{x}\mathrm{dx}=\ln|x|$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\ln|x|}\left(C+\int -\frac{1}{x^2}e^{\ln|x|}\mathrm{dx}\right). \\ &= |x|^{-1}\left(C-\int \frac{1}{x^2}\left|x\right|\mathrm{dx}\right) \\ &= |x|^{-1}C-|x|^{-1}\int \frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx} \end{aligned}$$

כעת: עבור $x>0$ נקבל

$$|x|^{-1}\int \frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}=x^{-1}\int \frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$$

ועבור $x<0$ נקבל

$$|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}=-x^{-1}\int\frac{-x}{x^2}\mathrm{dx}=x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$$

ולכן נוכל להמשיך עם $x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$. נמשיך:

$$\begin{aligned}y(x)&=|x|^{-1}C-|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}\\&=|x|^{-1}C-x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}\\&=|x|^{-1}C-x^{-1}\ln|x|\end{aligned}$$

ונציב תנאי התחלה $y(1)=0$.

$$0=y(1)=|1|^{-1}C-0=C$$

ולכן

$$y(x)=-x^{-1}\ln|x|.$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\left(1-\frac{y}{x}\right)y'=1-\frac{y}{x}-\frac{e^x}{2x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: נחלק ב $\left(1-\frac{y}{x}\right)$ לקבל:

$$y'=1-\frac{e^x}{2x\left(1-\frac{y}{x}\right)}$$

$$y'=1-\frac{e^x}{2\left(x-y\right)}$$

נגדיר $z=x-y$ ואז $z'=1-y'$ ונציב:

$$1-z'=1-\frac{e^x}{2z}$$

$$\frac{e^x}{2z}=z'$$

$$e^x = 2zz'$$

ובצורה שקולה

$$e^x \mathrm{dx} = 2z\mathrm{dz}.$$

קיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^x + C = z^2$$

וקיבלנו

$$z = \pm\sqrt{e^x + C}$$

נחזור ל y:

$$y = x - z = x \pm \sqrt{e^x + C}.$$

נציב תנאי התחלה $y(1) = 0$

$$0 = y(1) = 1 \pm \sqrt{e + C}$$

$$\pm\sqrt{e + C} = -1$$

לכן צריך לקחת את הפתרון של המינוס. נמשיך לבודד את C

$$\sqrt{e + C} = 1$$

$$C = 1 - e$$

וסה"כ התשובה היא

$$y(x) = x - \sqrt{e^x + 1 - e}.$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 2y' + y = xe^x$ המקיים $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר ההומוגנית $y''-2y'+y=0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן e^x, xe^x בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומוגנית הוא

$$y_h=C_1e^x+C_2xe^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x)=xe^x$ שהוא פולינום מדרגה 1 שמוכפל ב e^x (שמתאים ל 1 שהוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2), ננחש פתרון מהצורה $y_p=(\alpha_0+\alpha_1x)\,x^2e^x$. מתקיים

$$\begin{aligned}
y_p' &= \left((\alpha_0+\alpha_1x)\,x^2+2x\,(\alpha_0+\alpha_1x)+\alpha_1x^2\right)e^x\\
&= \left((\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1x)\,x^2+2x\alpha_0\right)e^x\\
y_p'' &= \left((\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1x)\,x^2+2x\alpha_0+2\alpha_0+2x\,(\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1x)+\alpha_1x^2\right)e^x\\
&= \left((\alpha_0+4\alpha_1+\alpha_1x)\,x^2+2x\,(2\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1x)+2\alpha_0\right)e^x
\end{aligned}$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned}
xe^x &= (\alpha_0+\alpha_1x)\,x^2e^x-2\left((\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1x)\,x^2+2x\alpha_0\right)e^x\\
&\quad+\left((\alpha_0+4\alpha_1+\alpha_1x)\,x^2+2x\,(2\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1x)+2\alpha_0\right)e^x\\
&= [2\alpha_0+6\alpha_1x]\,e^x
\end{aligned}$$

ונקבל $2\alpha_0=0, 6\alpha_1=1$. מכאן ש $\alpha_0=0, \alpha_1=\frac{1}{6}$ והפתרון הפרטי הוא

$$y_p=\left(0+\frac{1}{6}x\right)x^2e^x=\frac{1}{6}x^3e^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y=y_p+y_h=\frac{1}{6}x^3e^x+C_1e^x+C_2xe^x$$

ו

$$y'=\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^x+C_1e^x+C_2\,(x+1)\,e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$0 = y(0) = C_1$$

$$1 = y'(0) = C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 0$ ו $C_2 = 1 - C_1 = 1$. לסיכום:

$$y = \frac{1}{6}x^3e^x + xe^x.$$

4. כדורגל בעל מסה של $m = 2\text{kg}$ נזרק כלפי מעלה מגובה של $y_0 = 10m$ ומגיע לקרקע לאחר 2 שניות. כמו כן נתון כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל מהירות הכדור. לצורך הפשטות הניחו כי קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ הוא $g = 10$.

(א) מצאו את המהירות בה נזרק הכדור.

פתרון: נסמן מיקום הארץ ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 10$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 2 \cdot 10 = 20$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $\frac{1}{2}v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-\frac{1}{2}v$. לכן הכח הכולל הוא $-2g - \frac{1}{2}v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-2g - \frac{1}{2}v = ma = a$$

או $-2g - \frac{1}{2}y'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום והמהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונכפול ב 2 ונקבל

$$z' + 2z = -4g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = 2, b(x) = -4g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\text{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = 2x$ ונציב

$$e^{-2x}\left(C - \int 4ge^{2x}\text{dx}\right) = e^{-2x}\left(C - 2ge^{2x}\right) = e^{-2x}C - 2g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-2t}C-2g$$

או

$$.y'(t)=e^{-2t}C-2g$$

מכאן, ע"י אינטגרל פשוט, נקבל

$$.y(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}C-2gt+D$$

כעת נציב נתוני השאלה. נתון כי $y(0)=10$ ו $y(2)=0$. נקבל את המשוואות

$$\begin{cases}10=y(0)=-\frac{1}{2}C+D\\0=y(2)=-\frac{1}{2}e^{-4}C-4g+D\end{cases}$$

ומהמשוואה הראשונה נקבל $D=10+\frac{1}{2}C$. נציב במשוואה השניה

$$0=-\frac{1}{2}e^{-4}C-4g+D=-\frac{1}{2}e^{-4}C-4g+10+\frac{1}{2}C=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}\right)C-30$$

לכן $C=\frac{30}{\left(-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{60}{(1-e^{-4})}$ ו $D=10+\frac{1}{2}C=10+\frac{1}{2}\frac{60}{(1-e^{-4})}=10+\frac{30}{(1-e^{-4})}$. נחזור ל y' ונציב את C שמצאנו

$$y'(t)=e^{-2t}\frac{60}{(1-e^{-4})}-2g$$

ונקבל שהמהירות ההתחלתית היא

$$y'(0)=\frac{60}{(1-e^{-4})}-2g=\frac{60}{(1-e^{-4})}-20$$

(ב) מצאו את תאוצת הכדור ברגע הפגיעה בקרקע.

פתרון: בסעיף הקודם ראינו ש

$$y'(t) = e^{-2t}\frac{60}{(1-e^{-4})} - 2g$$

ולכן פונקציית התאוצה היא

$$.y''(t) = e^{-2t}\cdot\frac{-120}{(1-e^{-4})}$$

הכדור פוגע בקרקע לאחר 2 שניות ולכן התאוצה אז היא

$$y''(2) = e^{-4}\cdot\frac{-120}{(1-e^{-4})} = \frac{-120}{(e^{4}-1)}$$

5. נסמן ב D את אופרטור הגזירה, וב I את אופרטור הזהות.

(א) עבור $S = D + I$ מצאו פתרון למד"ר $Sy = x$.

פתרון: המד"ר המבוקשת היא

$$y' + y = x$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y' + a(x)y = b(x)$ עבור $a(x) = 1, b(x) = x$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נבחר $A(x) = x$ ונציב

$$y(x) = e^{-x}\left(C + \int xe^{x}\mathrm{dx}\right)$$

נחשב את הקדומה של xe^{x} על ידי אינטגרציה בחלקים

$$\int xe^{x}\mathrm{dx} = \left\{\begin{array}{ccc} f = x & \Rightarrow & f' = 1 \\ g' = e^{x} & & g = e^{x}\end{array}\right\} = xe^{x} - \int e^{x}\mathrm{dx} = e^{x}(x-1)$$

ונקבל ש

$$y(x) = e^{-x}\left(C + \int xe^{x}\mathrm{dx}\right) = e^{-x}\left(C + e^{x}\left(x-1\right)\right) = e^{-x}C + (x-1)$$

ואם נציב $C=0$ נקבל כי $y(x) = x-1$ הוא פתרון פרטי למד"ר.

(ב) מצאו פתרון למד"ר $xy'' + (x-1)\,y' - y = 0$ המקיים $y(1) = 0, y'(1) = 1$. רמז: $T = (xD - I)\,(D+I)$

פתרון: נסמן את הפתרון כטור טיילור $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ואז

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,a_k x^{k-2}$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned}
0 &= xy'' + (x-1)\,y' - y \\
&= xy'' + xy' - 1y' - y \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\,k a_{k+1} x^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,a_{k+1} x^{k} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k} \\
&= (-a_1 - a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)\,k a_{k+1} + k a_k + (k+1)\,a_{k+1} + a_k\right] x^{k} \\
&= (-a_1 - a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)\,(k+1)\,a_{k+1} + (k+1)\,a_k\right] x^{k} \\
&= (-a_1 - a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\left[(k+1)\,a_{k+1} + a_k\right] x^{k}
\end{aligned}$$

ולכן $a_1 = -a_0$ ולכל $k \geq 1$ מתקיים $(k+1)\left[(k+1)\,a_{k+1} + a_k\right] = 0$ או

$$a_{k+1} = -\frac{a_k}{(k+1)}$$

ולכן

$$a_2=-\frac{a_1}{2}=\frac{a_0}{2}$$

$$a_3=-\frac{a_2}{3}=-\frac{a_0}{3!}$$

$$a_4=-\frac{a_3}{4}=\frac{a_0}{4!}$$

ואפשר להוכיח באינדוקציה כי $a_k=(-1)^k\frac{a_0}{k!}$ לכל $k\geq 1$. עבור $a_0=1$ נקבל את הטור

$$\begin{aligned}y(x)&=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}x^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\\&=e^{-x}\end{aligned}$$

וקל לוודא שאכן $y_2(x)=e^{-x}$ פתרון למד"ר. נשים לב שהצבה של a_0 אחר יתן לנו a_0e^{-x} ולכן לא נוכל לקבל עוד פתרון כך שיהיו לנו שני פתרונות בת"ל. ניעזר ברמז

$$(xD-I)(D+I)=xD^2+xD-D-I$$

שמתאר את המד"ר שלנו. ראינו בסעיף קודם כי $y_1(x)=x-1$ מקיים כי

$$(D+I)\,y_2=x$$

כיוון ש $(xD-I)\,x=x-x=0$ נקבל ש $(xD-I)(D+I)\,y_2=0$ ולכן גם y_2 פתרון למד"ר של הסעיף. נוכיח כי y_1,y_2 על ידי הורונסקיאן

$$\det\begin{pmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}x-1&e^{-x}\\1&-e^{-x}\end{pmatrix}=-e^{-x}(x-1+1)=-xe^{-x}$$

שלא מתאפס עבור $x\neq 0$ ולכן סביב $x=1$ (ששמה נתוני ההתחלה) y_1,y_2 בת"ל והם יהיו בסיס כי המד"ר הינו מד"ר לינארית הומוגנית מסדר 2. לכן הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y(x)=c_1y_1+c_2y_2=c_1(x-1)+c_2e^{-x}$$

ונציב בו תנאי התחלה.

$$0 = y(1) = c_2 e^{-1}$$

ולכן $c_2 = 0$. מכאן ש $y(x) = c_1 (x-1)$. נגזור $y'(x) = c_1$ ומתנאי ההתחלה

$$1 = y'(1) = c_1$$

נקבל שהפתרון של התרגיל הוא $y(x) = x - 1$.