אנליזה הרמונית - תרגול מס' 2

יובל חצ'טריאן

6 בנובמבר 2017

1 חישוב בסיסי של אינטגרלים ממשיים בעזרת מרוכבים.

ראשית, נביא כלל ממרוכבים שמאפשר לנו לחשב איטנגרלים של פונקציות עם ערכים מרוכבים.

עובדה 1.1 נניח ש $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה גזירה (המשפט נכון גם אם נחליף את התחום מ $\mathbb{C}$ בכל תחום אחר $U\subseteq\mathbb{C}$) ומתקיים $f'(z)=g(z)$. אזי $\int_a^b g(x)\mathbf{d}x=f(b)-f(a)$. (כאן הגכוונה לאינגרל ממשי רגיל, כלמר

$$.(\int_a^b g(x)\,\mathbf{d}x=\int_a^b \mathbf{Re}g(x)\,\mathbf{d}x+i\int_a^b \mathbf{Im}g(x)\,\mathbf{d}x$$

דוגמא 1.2 כך למשל, $\int_a^b e^{zx}\mathbf{d}x=\frac{1}{z}\left(e^{zb}-e^{za}\right)$ כלל $z\in\mathbb{C}$.

עובדה 1.3 את הפונקציות הטריגונומטריות הידועות ניתן לבטא גם באופן הבא:

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$
$$\sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$$

העובדה מהמרוכבים וזהות מקלות לעיתים קרובות חישוב של אינטגרלים ממשיים, במיוחד אלה שכוללים בתוכם פונקציות טריגונומטריות וחזקות של e. על מנת להדגים את השיטה נחשב את פיתוח פורייה של הפונקציה $e^{-|x|}$.

דוגמא 1.4 חשבו את הפיתוח פורייה של הפונקציה $e^{-|x|}$.

פתרון: כיוון שהפונקציה זוגית הפיתוח פורייה שלה הוא טור קוסינוסים, כלמר

$$.e^{-|x|}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

נעבור לחשב את המתקדמים.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-|x|}\mathbf{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-x}\mathbf{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-x}\mathbf{d}x$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(1-e^{-\pi}\right)$$

כאן השתמשנו בעובדה שהפונקציה זוגית וחישבנו אינטגרל על חצי קטע והכפלנו אותו ב 2. על מנת לחשב את שאר המקדמים נשתמש בזהויות שעליהן דיברנו.

$$.a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|}\cos nx\mathbf{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-|x|}\mathbf{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-x}\cos nx\mathbf{d}x$$

שוב השתמשנו בזוגיות של הפונקציה ובהגדרה של ערך מוחלט בשביל המעברים. עכשו נשתמש בזהות על e והפונקציות הטריגונומטריות.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-x}\cos nx\mathbf{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-x}\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right)\mathbf{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} e^{-x+inx}\mathbf{d}x + \int_{0}^{\pi} e^{-x-inx}\mathbf{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{e^{-x+inx}}{-1+in}\right|_{0}^{\pi} + \left.\frac{e^{-x-inx}}{-1-in}\right|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{-\pi}(-1)^n-1}{-1+in} + \frac{e^{-\pi}(-1)^n-1}{-1-in}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(e^{-\pi}(-1)^n-1\right)\left(\frac{-1-in}{1+n^2}+\frac{-1+in}{1+n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(e^{-\pi}(-1)^n-1\right)\frac{(-2)}{1+n^2} \\
&= \frac{2}{\pi(1+n^2)}\left(1-(-1)^n e^{-\pi}\right)
\end{aligned}$$

הטור שנקבל הינו

$$.e^{-|x|} = \frac{1}{\pi}\left(1-e^{-\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(1+n^2)}\left(1-(-1)^n e^{-\pi}\right)\cos nx$$

2 טור פורייה מרוכב.

הגדרה 2.1 טור פורייה מרורכב של פונקציה רציפה למקוטעין f בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$$

כאשר

$$.c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\mathbf{d}x$$

דוגמא 2.2 פתחו את הפונקציה x לטור פורייה מרוכב.

פתרון: עבור $n \neq 0$ נקבל

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx}\mathbf{d}x = \frac{1}{2\pi}\left(-\left.\frac{xe^{-inx}}{in}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\mathbf{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{ixe^{inx}}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{2i\pi(-1)^n}{2\pi n} = \frac{i(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

עבור $n=0$ נקבל $c_0=0$ מכיוון ש x היא פונקציה אי - זוגית.

3 פיתוח פורייה בקטע כללי.

נניח ש f היא פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $\left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right]$. אזי פיתוח פורייה שלה אפשר להביע באופן הבא. בעזרת החלפת משתנים נהפוך אותה לפונקציה בקטע $[-\pi,\pi]$ ונגיר

$$g\left(t\right)=f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=g\left(\frac{2\pi L}{x}\right)$$

מקדמי פורייה של $g\left(x\right)$ הינם

$$a_{n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(x\right)\cos nx\mathbf{d}x\,n=0,1,2$$
$$b_{n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(x\right)\sin nx\mathbf{d}x\,n=1,2,\ldots$$

אם נחזור חזרה לקטע המקורי נראה שלמעשה אפשר לרשום

$$f\left(x\right)\sim\frac{a_{0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}\cos\frac{2\pi nx}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_{n}\sin\frac{2\pi nx}{L}$$

כלמר את f ניתן לפתח לטור של קוסינוסים וסינוסים גם כן, אלא צריך "לרנממל את המחזור שלהם".

עכשו נרצה לבטא את a_n ו b_n כאיטנגרלים אם $\cos\frac{2\pi nx}{L}$ ו $\sin\frac{2\pi nx}{L}$. זאת אפשר לעשות בקלות על ידי החלפת משתנים חזרה

$$a_{n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(x\right)\cos nx\mathbf{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right)\cos nx\mathbf{d}x=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f\left(t\right)\cos\frac{2\pi nt}{L}\mathbf{d}t$$

באופן דומה נקבל

$$.b_{n}=\frac{2}{L}\int_{L/2}^{L/2}f\left(t\right)\sin\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)\mathbf{d}t$$

על ידי המשחה מחזורית נקבל פיתוח פירייה כללי עבור קטע $[a,b]$

$$a_{n}=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\mathbf{d}x$$
$$b_{n}=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\mathbf{d}x$$

דוגמא 3.1 מצאו פיתוח פורייה של הפונקציה $f\left(x\right)=\min\left\{1,|x|\right\}$ בקטע $[-c,c]$.

פתרון: פונקציה זוגית ולכן נקבל טור קוסינוסים. נחשב את המקדמים

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f\left(x\right)\mathbf{d}x = \frac{2}{c}\int_{0}^{\pi} f\left(x\right)\mathbf{d}x = \frac{2}{c}\int_{0}^{1} x\mathbf{d}x + \frac{2}{c}\int_{1}^{c} 1\mathbf{d}x \\
&= \frac{2}{c}\left(\frac{1}{2}+c-1\right) = \frac{2}{c}\left(c-\frac{1}{2}\right) = 2-\frac{1}{c} \\
a_n &= \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f\left(x\right)\mathbf{d}x = \frac{2}{c}\int_{0}^{\pi} f\left(x\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\mathbf{d}x \\
&= \frac{2}{c}\left(\int_{0}^{1} x\cos\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\mathbf{d}x + \int_{1}^{c}\cos\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\mathbf{d}x\right) \\
&= \frac{2}{c}\left(\frac{c}{\pi n}\left(x\sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\Big|_{0}^{1} - \int_{1}^{\pi}\sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right) + \sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\Big|_{1}^{c}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi n}\left(\sin\left(\frac{\pi n}{c}\right) + \sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\Big|_{1}^{c} + \frac{c}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\Big|_{1}^{c}\right) \\
&= \frac{2c}{\left(\pi n\right)^2}\left(\left(-1\right)^n - \cos\left(\frac{\pi n}{c}\right)\right)
\end{aligned}$$

4 פיתוח לטורי סינוסים וקוסינוסים.

אם מוגדרת פונקציה בקטע $[0,c]$ ניתן להרחיב אותה לפונקציה על קטע $[-c,c]$ בשני אופנים המשכה זוגית או אי־זוגית. עובדה זו מאפשרת לפתח פונקציה בקטע $[0,c]$ לטור סינוסים או קוסינוסים.