

## תרגיל 8 - אינפי 4 - תשע"ט

**תרגיל 1.** תהינה  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות. חשבו את

$$\iint_M (f(x), g(y), h(z)) \cdot NdS$$

כאשר  $S$  הוא השפה של התיבה

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq h \leq c$$

ו  $N$  הוא נורמל היחידה החיצוני.

**תרגיל 2.** מצאו את השטח של הגוף הנוצר מחיתוך המישור  $ax + by + cz = d$  עם הגליל  $x^2 + y^2 \leq 1$  עבור  $a, b, c \neq 0$ . כמו כן, תארו את הצורה הגאומטרית של השטח המתקבל על ידי החיתוך. (בנוסף: תנו תאור מדויק מדויק כפונקציה של  $a, b, c$  ומצאו את השטח בלי לחשב אינטגרל).

**תרגיל 3.** חשבו בעזרת משפט הדיברגנץ את האינטגרל  $\iint_M F \cdot NdS$  עם הנורמל החיצוני  $N$ , כאשר  $F$  ו  $M$  נתונים על ידי:

$$1. M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\} \text{ ו } F = (yx, 2y, -z)$$

$$2. M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\} \text{ ו } F = (y - z, z - x, x - y - 1)$$

(רמז: אם רוצים להשתמש במשפט הדיברגנץ, יש ל"סגור" את המשטח תחילה).

$$3. M = \{(x, y, z) \mid (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 3)^2 = 1\}, F = (x^2, y^2, z^2)$$

$$4. F = (x^2, y^2, z^2), \text{ כאשר } M \text{ הוא שפת הקובייה } [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1].$$

**תרגיל 4.** נסמן על ידי  $\Delta u$  את אופרטור הלפלסיאן  $\mathbb{R}^3$  המוגדר על ידי

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(ההגדרה עובדת לכל מימד, אבל בשאלה הזאת אנחנו עובדים עם  $\mathbb{R}^3$ ). יהי  $V$  תחום קומפקטי שמקיים את תנאי המשפט דיברגנץ. יהיו  $v, u$  גזירות פעמיים ברציפות ב  $V$ , ויהי  $n$  נורמל היחידה החיצוני ל  $S$ . הוכיחו שמתקיים השוויון

$$\iiint_V v \Delta u - u \Delta v = \iint_{\partial V} v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} dS$$

כאשר האינטגרל מצד שמאל הוא אינטגרל משולש יחידה והאינטגרל מצד ימין הוא אינטגרל משטחי מסוג ראשון. הדרכה: ניתן להשתמש בזהות

$$\frac{\partial f}{\partial w}(a) = \nabla f(a) w$$

כזכור, נגזרת כיוונית  $\frac{\partial f}{\partial w}(a)$  מוגדרת על ידי

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tw) - f(a)}{t}$$

**תרגיל 5.** חשבו בעזרת משפט הדיברגנץ על מנת לחשב את הנפחים הבאים:

1. התחום בחסום בין  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ו המישור  $z = \frac{1}{2}$ .

2. התחום המקיים  $x^2 + y^2 \leq (2 - z)^2$  ו  $z = 0$  ו  $z = 1$ .

**תרגיל 6.** מצאו פרמטריזציה חיובית עבור עקומה  $C$  במקרים הבאים.

1.  $C = \{(x, y, z) : 5 - x^2 - y^2 = z \wedge x + y + z = 1\}$  ביחס לנורמל החיצוני של הפרבולואיד  $z = 5 - x^2 - y^2$

2.  $C = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2 \wedge z = y\}$  בעלת אוריינטציה חיובית ביחס לנורמל  $z = y$  למישור  $(0, -1, 1)$

**תרגיל 7.** חשבו בעזרת משפט סטוקס חשבו את האינטגרלים הבאים:

1.  $\int_{\Gamma} y dx + x^2 dy - z dz$  כאשר  $\Gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, z = 1\}$  מכוונת נגד כיוון השעון אם מסתכלים מהכיוון החיובי של ציר  $z$ .

2.  $\int_{\Gamma} y dx - x dy + z dz$  כאשר  $\Gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$  מכוונת נגד כיוון השעון עם מסתכלים מהכיוון החיובי של ציר  $z$ .

3.  $\int_{\Gamma} y dx - x dy + z dz$  כאשר  $\Gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z = x\}$  מכוונת חיובית ביחס לנורמל  $(-1, 0, 1)$  למישור  $z = x$ .

4.  $\int_{\Gamma} (z + 2xyz) dx + x^2 z dy + (x - y) dz$  כאשר  $\Gamma$  הוא שפה של המשטח המישורי  $3x + 2y - z = 0$  הנמצא בתוך הכדור  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$  ו  $\Gamma$  מכוונת חיובית ביחס לנורמל  $(-3, -2, 1)$  למישור  $3x + 2y - z = 0$ .