בס"ד

אלגברה לינארית 1- פיתרון תרגיל 6

1.

א)

$$(AA^t-A^tA)^t=\left(AA^t+\left(-1\right)A^tA\right)^t=\left(AA^t\right)^t+\left(-1\right)(A^tA)^t=\left(A^t\right)^tA^t-A^t\left(A^t\right)^t=AA^t-A^tA$$

ב) $\left(A-A^t\right)^t=\left(A+\left(-1\right)A^t\right)^t=A^t+\left(-1\right)\left(A^t\right)^t=A^t-A=-\left(A-A^t\right)$

ג) לכל A ריבועית מתקיים $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ו- $\frac{A-A^t}{2}$ אנטי סימטרית כי:

$\left(\frac{A-A^t}{2}\right)^t=\frac{A^t-(A^t)^t}{2}=\frac{A^t-A}{2}=-\frac{A-A^t}{2}$ ולכן $\frac{A-A^t}{2}$ אנטי סימטרית.

באופן דומה $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית.

ומתקיים $A=\frac{A}{2}+\frac{A^t}{2}+\frac{A}{2}-\frac{A^t}{2}=\frac{A+A^t}{2}+\frac{A-A^t}{2}$ ז"א כל A ריבועית הבענו בתור סכום של מטריצה סימטרית ואנטי סימטרית

2. א) המטריצות המשולשיות עליונות סגורות לכפל כי:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+0+0\dots & \cdots & a_{11}b_{1n}+\dots a_{1n}b_{nn} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

כל איבר מתחת לאלכסון במטריצה AB הוא : $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$ עבור i >j.

ז"א:

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{i}a_{ik}\cdot b_{kj}+\sum_{k=\mathrm{i}}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$$

בסכום הראשון בכל אחד מהמחוברים ה$a_{ik}=0$ שהרי בסכום הראשון $i>k$ וכיוון ש A משולשית עליונה אז $a_{ik}=0$

ולכן הסכום הראשון כולו מתאפס.

בסכום השני בכל אחד מהמחוברים ה $b_{kj}=0$ שהרי בסכום השני $i>k>j$ וכיוון ש B משולשית עליונה אז $b_{kj}=0$

ולכן הסכום שני גם כולו מתאפס.

וקיבלנו ש איבר מתחת לאלכסון במטריצה AB שווה 0. ולכן AB משולשית עליונה.

ב) לא סגורה לכפל כי משולשית עליונה*משולשית תחתונה לא בהכרח נותן משולשית. לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 21 & 18 \\ 28 & 37 & 30 \\ 24 & 30 & 36 \end{pmatrix}$$

ג)סגורה לכפל. כי $\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\beta\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\alpha I*\beta I=(\alpha\beta)I$.

3. א) $\alpha tr(A)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\alpha a_{ii}=tr(\alpha A)$

ב) $tr(AB)=\sum_{k=1}^{n}(AB)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{ik}$ השווה האחרון (משמאל)

נכון כי הכפל השדה קומוטטיבי.

ומצד שני $tr(BA)=\sum_{k=1}^{n}(BA)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}$

צד ימין המשוואה הראשונה שווה לצד ימין בשנייה כי i,k רצים על אותו התחום + יש קומוטטיביות בחיבור בשדה.

4. אין בהכרח קומוטטיביות בכפל ואין בהכרח איבר הופכי (ראינו דוגמאות לכך בתרגולים).

5. א)

$$A^2=(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B=A(B)B=(AB)B=AB=A$$

$$B^2=(BA)^2=(BA)(BA)=B(AB)A=B(A)A==(BA)A=BA=B$$

ב) $Ax=0\Leftrightarrow ABx=0\Leftrightarrow B(AB)x=\underset{0}{B\cdot 0}\Leftrightarrow \underset{B}{(BA)}Bx=0\Leftrightarrow B^2x=0\underset{\text{סעיף א}}{\Leftrightarrow} Bx=0$

6. נכפיל את שני צדדי המשוואה ב C משמאל: $CA\underline{x}=C\cdot\underline{0}\Rightarrow I\underline{x}=\underline{0}$

כלומר יש פתרון *טריוויאלי* אחד שהוא : $\underline{x}_0=\underline{0}$.

7. $B^t=\begin{pmatrix}1&5&3\\2&5&4\end{pmatrix}$; $A^t=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\5&5\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&24\\47&57\\74&90\end{pmatrix}$$

$$B^tA^t=\begin{pmatrix}1&5&3\\2&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&47&74\\24&57&90\end{pmatrix}$$