לינארית להנדסה- פתרון תרגיל 12

תרגיל 1. חשבו את הדטרמיננטה הבאה

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

פתרון.
נבצע את פעולות השורה הבאות $R_i \leftarrow R_i + R_1$ ונקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} \underset{R_i \leftarrow R_i + R_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$$

קבלנו מטריצה משולשית עליונה, הדטרמיננטה של מטריצה משולשית עליונה היא כפל אברי האלכסון לכן

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

תרגיל 2. ידוע כי המספרים $61902,\ 6327,\ 86469,\ 31882,\ 23028$ מתחלקים ב-19 ללא שארית. הראו (ללא חישוב מפורש) ש-

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

גם כן מתחלק ב-19 ללא שארית. רמז: שימו לב שעמודות במטריצה הן המספרים המוזכרים בשאלה

פתרון.
נשים לב שמתקיים

$$\begin{array}{rcl} 61902 & = & 6\cdot 10000+1\cdot 1000+9\cdot 100+0\cdot 10+2\cdot 1 \\ 6327 & = & 0\cdot 10000+6\cdot 1000+3\cdot 100+2\cdot 10+7\cdot 1 \\ 86469 & = & 8\cdot 10000+6\cdot 1000+4\cdot 100+6\cdot 10+9\cdot 1 \\ 31882 & = & 3\cdot 10000+1\cdot 1000+8\cdot 100+8\cdot 10+2\cdot 1 \\ 31882 & = & 2\cdot 10000+3\cdot 1000+0\cdot 100+2\cdot 10+8\cdot 1 \end{array}$$

לכן אם נבצע את הפעולת שורה $R_5 \leftarrow R_5+10R_4+100R_3+1000R_2+10000R_1$ נקבל

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 61902 & 6327 & 86469 & 31882 & 31882 \end{vmatrix}$$

כעת נשתמש בנתון שהמספרים הללו ממתחלקים ב-19,

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 61902 & 6327 & 86469 & 31882 & 31882 \end{vmatrix} = 19 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ \frac{61902}{19} & \frac{6327}{19} & \frac{86469}{19} & \frac{31882}{19} & \frac{31882}{19} \end{vmatrix}$$

והביטוי שקבלנו מתחלק ב-19 ללא שארית.

תרגיל 3. יהא $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. ויהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס או״נ. נגדיר מטריצה $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך: עמודה j של המטריצה P הוא הוקטור v_j. כלומר $P=\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

1. הוכיחו כי $P^tP=I$
2. הוכיחו $det(P)\in\{1,-1\}$

פתרון.

1. מחישוב ישיר

$$[P^tP]_{i,j}=v_i^t\cdot v_j=\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

כלומר $P^tP=I$

2. מכפליות הדטרמיננטה נקבל

$$\left|P^t\right|\cdot|P|=|I|=1$$

כיוון ש $|P|=|P^t|$ נקבל $|P|^2=1$ וכיוון ש $|P|$ מספר ממשי נסיק כי $|P|\in\{\pm 1\}$

תרגיל 4. מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ נקראת בלוק ג׳ורדן (אין זה מתייחס לחסימה של מייקל ג׳ורדן) מסדר n

עם סקלר α מצאו את הע״ע והווקטורים העצמים של בלוק ג׳ורדן מסדר 4, משמע המטריצה $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

פתרון.
ראשית נמצא λ כך שהפולינום האופייני מתאפס.

$$0=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-\alpha & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-\alpha & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & -1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-\alpha\end{vmatrix}=(\lambda-\alpha)^4$$

משמע $\lambda=\alpha$ הוא ע"ע היחיד של המטריצה. כעת נמצא את הווקטור העצמי עבורו

- $\lambda=\alpha$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & 1\\ 0 & 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

מכאן הווקטור העצמי של $\lambda=\alpha$ הוא $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

תרגיל 5. יהיה v וקטור עצמי של המטריצה A ששייך לערך העצמי λ.

1. הראה שהווקטור x הוא גם ווקטור עצמי של המטריצה A^k ($k\in\mathbb{N}$) ששייך לערך עצמי λ^k.
2. הראה שהווקטור x הוא גם ווקטור עצמי של המטריצה A^3-2A+I ששייך לערך עצמי $\lambda^3-2\lambda+1$.
3. הראה שאם $\lambda\neq 0$ אז x הוא ווקטור עצמי גם של A^{-1} (הנחה ש-A הפיכה)

פתרון.

1. נוכיח בעזרת אינדוקציה שמתקיים
$$A^kx=\lambda^kx$$
עבור $k=1$
$$Ax=\lambda x$$
זה מתקיים כי נתון ש-x הוא ו"ע של A עבור ע"ע λ.
נניח את נכונות הטענה עבור $k-1$.
נוכיח עבור k:
$$A^kx=\lambda^kx$$
נתחיל מאגף שמאל
$$A^kx=A^{k-1}(Ax)=A^{k-1}(\lambda x)=\lambda\left(A^{k-1}x\right)=\lambda\left(\lambda^{k-1}x\right)=\lambda^kx$$

2. צריך להראות ש-
$$\left(A^3-2A+I\right)x=\left(\lambda^3-2\lambda+1\right)x$$
בעזרת חוק הפילוג זה שקול ל-
$$A^3x-2Ax+x=\lambda^3x-2\lambda x+x$$
אך אנחנו כבר ידועים ש-
$$\begin{cases}A^3x & = & \lambda^3x\\ Ax & = & \lambda x\end{cases}$$
ולכן
$$\left(A^3-2A+I\right)x=\left(\lambda^3-2\lambda+1\right)x$$
מתקיים.

3. צריך להראות ש-

$$A^{-1}x = \mu x$$

עבור μ כלשהו.
ידוע ש-

$$Ax = \lambda x$$

לכן

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x$$
$$\Downarrow$$
$$x = A^{-1}\lambda x$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$$
$$\Downarrow$$
$$A^{-1}x = \mu x$$

עבור $\mu = \frac{1}{\lambda}$

תרגיל 6. הוכיחו ש- A לא הפיכה אם ורק אם קיים לה ע״ע $\lambda = 0$

פתרון.
דבר הראשון נשים לב שבפרק הזה אנחנו מדברים רק על מטריצות ריבועיות!
$\Leftarrow$נניח ש-A לא הפיכה לכן למערכת משוואות

$$Ax = 0$$

קיים פתרון לא טריוואלי מכאן

$$Ax = 0 = 0 \cdot x$$

משמע 0הוא ע״ע של A.
$\Rightarrow$נניח ש- $\lambda = 0$הוא ע״ע של A, לכן

$$Ax = 0 \cdot x = 0$$

כלומר קיים פתרון לא טריוואלי למערכת ההומגנית, לכן A אינה הפיכה.

תרגיל 7. עבור אילו ערכי a המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה

1. מעל $\mathbb{R}$
2. מעל $\mathbb{C}$

פתרון.
ראשית נמצא את הע״ע של המטריצה

$$p_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -a \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 - a\right] = (\lambda-1)\left[\lambda-1+\sqrt{a}\right]\left[\lambda-1-\sqrt{a}\right]\lambda$$

לכן העע הם $\lambda = 1, 1-\sqrt{a}, 1+\sqrt{a}$

- אם $a > 0$ אז יש לנו שלושה עע ממשיים שונים ולכן היא לכסינה ב-$\mathbb{R}$ וב-$\mathbb{C}$
- אם $a < 0$ אז יש לנו שלושה עע מרוכבים שונים ולכן היא לכסינה ב- $\mathbb{C}$ אבל לא לכסינה ב-$\mathbb{R}$
- אם $a = 0$ אז יש לנו עע אחד $(\lambda = 1)$ הוא בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 1 ולכן היא איננה לכסינה (לא ב-$\mathbb{C}$ ולא ב-$\mathbb{R}$)

תרגיל 8. עבור אילו ערכי k המטריצה $\begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$

פתרון. :

ראשית נמצא את הע״ע של המטריצה

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-(k+3) & 0 & 0 \\ k+3 & \lambda-k & -(k+3) \\ k+3 & -k & \lambda-(k+3) \end{pmatrix}\right| = (\lambda-(k+3))\left[(\lambda-k)(\lambda-(k+3))-k(k+3)\right] = \\ &= (\lambda-(k+3))\left[(\lambda-k)(\lambda-(k+3))-k(k+3)\right] = \lambda(\lambda-(k+3))(\lambda-(2k+3)) \end{aligned}$$

לכן הע״ע הם $\lambda = 0, k+3, 2k+3$
אם $k \neq -3, 0, -\frac{3}{2}$ כל הע״עים שונים לכן היא לכסינה.

- עבור $k=-3$ הע״עים הם $\lambda = 0, 0, -3$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה לריבוי האלגברי (שווה ל-2) ולכן היא לכסינה.
- עבור $k=0$ הע״עים הם $\lambda = 0, 3, 3$ הריבוי הגאומטרי של 3 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2ולכן היא לא לכסינה.
- עבור $k=-\frac{3}{2}$ הע״עים הם $\lambda = 0, \frac{3}{2}, 0$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2 ולכן היא לא לכסינה.
לסיכום המטריצה לא לכסינה עבור $k = 0, -\frac{3}{2}$

פתרון.
ראשית נמצא את הע״ע של המטריצה :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-(k+3) & 0 & 0 \\ k+3 & \lambda-k & -(k+3) \\ k+3 & -k & \lambda-(k+3) \end{pmatrix}\right| = (\lambda-(k+3))\left[(\lambda-k)(\lambda-(k+3))-k(k+3)\right] = \\ &= (\lambda-(k+3))\left[(\lambda-k)(\lambda-(k+3))-k(k+3)\right] = \lambda(\lambda-(k+3))(\lambda-(2k+3)) \end{aligned}$$

לכן הע״ע הם $\lambda = 0, k+3, 2k+3$

פתרון. אם $k \neq -3, 0, -\frac{3}{2}$ כל הע״עים שונים לכן היא לכסינה.

- עבור $k=-3$ הע״עים הם $\lambda = 0, 0, -3$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה לריבוי האלגברי (שווה ל-2) ולכן היא לכסינה.
- עבור $k=0$ הע״עים הם $\lambda = 0, 3, 3$ הריבוי הגאומטרי של 3 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2ולכן היא לא לכסינה.
- עבור $k=-\frac{3}{2}$ הע״עים הם $\lambda = 0, \frac{3}{2}, 0$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2 ולכן היא לא לכסינה.
לסיכום המטריצה לא לכסינה עבור $k = 0, -\frac{3}{2}$

תרגיל 9. הוכח או הפרך : האם העתקות הבאות הן העתקות לנאריות?

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix}$$
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x+2y \\ 0 \end{pmatrix}$$
3. תהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה כלשהי. תהי $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ נגדיר
$$T(A) = AB - BA$$

פתרון.

1. • משמרת חיבור-

$$\begin{aligned}
&T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &=\\
&T\left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}\right) &=\\
&\begin{pmatrix} 5\left(x_1+x_2\right) \\ -3\left(y_1+y_2\right) \end{pmatrix} &=\\
&\begin{pmatrix} 5x_1 \\ -3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5x_2 \\ -3y_2 \end{pmatrix} &=\\
&T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

• משמרת כפל בסקלר

$$\begin{aligned}
&T\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &=\\
&T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} &=\\
&\begin{pmatrix} 5\alpha x \\ -3\alpha y \end{pmatrix} &=\\
&\alpha\begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix} &=\\
&\alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כלומר העתקה $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix}$ מקיימת את שתי התכונות ולכן היא העתקה לינארית

2. • משמרת חיבור-

$$\begin{aligned}
&T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) &=\\
&T\left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix}\right) &=\\
&\begin{pmatrix} 1 \\ \left(x_1+x_2\right)+2\left(y_1+y_2\right) \\ 0 \end{pmatrix} &=
\end{aligned}$$

בעוד ש-

$$\begin{aligned}
&T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &=\\
&\begin{pmatrix} 1 \\ \left(x_1+x_2\right)+2\left(y_1+y_2\right) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \left(x_1+x_2\right)+2\left(y_1+y_2\right) \\ 0 \end{pmatrix} &=\\
&\begin{pmatrix} 2 \\ \left(x_1+x_2\right)+2\left(y_1+y_2\right) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ההעתקה $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x+2y \\ 0 \end{pmatrix}$ אינה משמרת חיבור ולכן אינה העתקה לינארית

3. • משמרת חיבור-

$$\begin{aligned}
&T\left(A_1+A_2\right) &=\\
&\left(A_1+A_2\right)B - B\left(A_1+A_2\right) &=\\
&A_1B + A_2B - BA_1 - BA_2 &=\\
&A_1B - BA_1 + A_2B - BA_2 &=\\
&T\left(A_1\right) + T\left(A_2\right)
\end{aligned}$$

משמרת כפל בסקלר

$$\begin{aligned} T(\alpha A) &= \\ (\alpha A)B - B(\alpha A) &= \\ \alpha(AB - BA) &= \\ \alpha T(A) \end{aligned}$$

תרגיל 10. תהי T העתקה לינארית הוכיחו ש-

1. $T(0) = 0$
2. יהיו $v_1, ...v_n$ כך ש- $T(v_1), ...T(v_n)$ בת״ל הוכח ש- $v_1, ...v_n$ גם כן בת״ל
3. יהיו $v_1, ...v_n$ בת״ל ו-T ה״ל חח״ע (כמו שהוגדר בבדידה) הוכיחו ש- $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ בת״ל

פתרון.

.1

$$\begin{gathered} T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0) \\ \Downarrow \\ 0 = T(0) \end{gathered}$$

.2 יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$כך ש-

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

צ״ל $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

$$\begin{gathered} 0 = T(0) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) \\ \Downarrow \\ \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0 \end{gathered}$$

.3 יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$כך ש-

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = 0$$

צ״ל $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = 0 \\ \Downarrow \\ T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = 0 \end{gathered}$$

אבל ידוע שגם $T(0) = 0$ ו-T חח״ע לכן

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \\ \Downarrow \\ \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0 \end{gathered}$$

תרגיל 11. מצאו הע״ל $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ כך ש-$Im(T) = Span\{1+2x, x^2+x\}$ ו- $ker(T) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

פתרון.
כדי לקיים את התנאי של $ker(T) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ נדרוש ש-0 $= T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ נשלים את הווקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ לבסיס ל-$\mathbb{R}^3$ על ידי הוספת הווקטורים $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואת הווקטורים הללו נשלח לאברי הבסיס של ה-Im כלומר בסה״כ יש למצוא

ה"ל המקיימת

פתרון.

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0,\ T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1+2x,\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=x^2+x$$

כעת נפעיל את משפט ההגדרה ונקבל

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} &= cT\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+(a-c)\,T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(b-c)\,T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} &=\\ &= c\cdot 0+(a-c)\,(1+2x)+(b-c)\left(x^2+x\right) &=\\ &= (b-c)\,x^2+(b-3c+2a)\,x+(a-c)\end{aligned}$$

בהצלחה!!