

אינפי 3 תרגיל 1

(1) הוכיחו את "אי שיויון המשולש השני" במרחב נורמי - $\| \|u\| - \|v\| \| \leq \|u \pm v\|$. הסיקו שאם סדרת וקטורים $\{u_n\}$ מקיימת $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ אז היא מקיימת $\| \|u_n\| - \|u\| \| \rightarrow 0$.

(2) יהי V ממ"פ, ותהי קבוצה אורתונורמלית. יהי $x \in V$ כלשהו. הוכיחו שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

(3) יהיו $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ מרחבים נורמיים, מי מהפונקציות הבאות: היא נורמה על $X \times Y$? **הוכיחו!** החיבור והכפל בסקלר ב- $X \times Y$ מוגדרים איבר-איבר.

א. $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$

ב. $\|(x, y)\| = \|x\|_X \|y\|_Y$

ג. $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$

(4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. במרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{R} : $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$

ב. במרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2)$$

זכרו שבמרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{R} מתקיים $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ובמרחב

מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} מתקיים $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

(5) הוכיחו שאם מרחב מכפלה פנימית $(V, \|\cdot\|)$ מעל \mathbb{R} מקיים את אי שיויון המקבילית:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

אז הפונקציה $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$ היא מכפלה פנימית מעל V שמשרר

את הנורמה $\|\cdot\|$.

הדרכה: יש צורך להוכיח את אקסיומות המכפלה הפנימית, וש- $\sqrt{\langle u, u \rangle} = \|u\|$. הדבר היחיד שיש להוכיח ואינו מיידה הוא ליניאריות במשתנה הראשון

$$\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$$

הוכיחו זאת בשני חלקים.

קודם הוכיחו אדטיביות - הוכיחו $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$. מה ששקול לשיויון

$$\|u - w\|^2 + \|v - w\|^2 - \|u + v - w\|^2$$

$$= \|u + w\|^2 + \|v + w\|^2 - \|u + v + w\|^2$$

לפי אי שיויון המקבילית

$$\|u \pm w\|^2 + \|v \pm w\|^2 = \frac{1}{2}(\|u + v \pm 2w\|^2 + \|u - v\|^2)$$

שימוש בשיוויון הזה עבור "+" ועבור "-", וצימצום, יצמצם את המשוואה ל-

$$\frac{1}{2}\|u + v - 2w\|^2 - \|u + v - w\|^2 = \frac{1}{2}\|u + v + 2w\|^2 - \|u + v + w\|^2$$

שימוש נוסף באי שיוויון המקבילית ייתן:

$$\frac{1}{2}\|u + v \pm 2w\|^2 - \|u + v \pm w\|^2 = \|\pm w\|^2 - \frac{1}{2}\|u + v\|^2$$

ואז ניתן לצמצם את הביטוי ל- $0 = 0$.

אחר כך, יש להוכיח כפל מולטיפלטיביות - להוכיח $\langle au, w \rangle = a\langle u, w \rangle$.
זה נעשה בשלבים.

(א) למספרים הטבעיים $a \in \mathbb{N}$ ניתן להוכיח זאת באינדוקציה.

(ב) עבור $a = 0$ זה נובע מיידית מאדיטיביות.

(ג) עבור $-a$, כאשר $a \in \mathbb{N}$, זה נובע מיידית מאדיטיביות ומסעיפים (א) ו-(ב).

וככה מוכיחים זאת לכל $a \in \mathbb{Z}$

(ד) עבור $a = \frac{n}{m}$ מספר רציונאלי זה נובע בקלות מהסעיפים הקודמים, וככה מוכיחים

זאת לכל $a \in \mathbb{Q}$

(ה) עבור $a \in \mathbb{R}$ כללי לוקחים סדרה $\{a_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ ששואפת ל- a .

צריך להשתמש בעובדה הבאה: אם סדרה b_n שואפת ל- 0 אז לכל וקטור u מתקיים

$$\|b_n u\| \rightarrow 0$$

בשיעור הבא תראו שעובדה הזאת היא טריוויאלית.

משתמשים בה כדי להוכיח ש- $\|a_n u \pm v\| \rightarrow \|au \pm v\|$ ולכן $\langle a_n u, w \rangle \rightarrow \langle au, w \rangle$

(העזרו בשאלה 1)

בגלל ש- a_n רציונליים מתקיים $\langle a_n u, w \rangle = a_n \langle u, w \rangle \rightarrow a \langle u, w \rangle$ והשיוויון נובע מיחידות בגבול.