

תרגיל 5

להגשה עד 11.12.17

שאלה 1

יהיו מספרים ממשיים. נגדיר: $F(x) := \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{[a_j, \infty)}(x)$, באשר $\mathbf{1}_A$ היא הפונקציה המציינת של הקבוצה A .

מתהליך ההרחבה נקבל את מרחב המידה השלם (\mathbb{R}, S_F, μ_F) .

1. תארו את המידה μ_F המתקבלת ע"י ה"נ"ל.

2. מיהן הקבוצות $A \subseteq \mathbb{R}$ המדידות S_F ?

3. מיהן הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המדידות S_F ?

4. חשבו את האינטגרלים: $\int_{\mathbb{R}} 1 d\mu_F, \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_F$.

שאלה 2

יהי $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה חיובית סופית, ויהיו f, g פונקציות ממשיות מדידות- \mathcal{A} . הוכיחו או הפריכו: אם לכל $E \in \mathcal{A}$: $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ אזי $f = g$ כמעט בכל מקום- μ .

שאלה 3

הוכיחו את משפט ערך הביניים האינטגרלי עבור אינטגרל לבג:

יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה חיובית, ותהי $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה- \mathcal{A} כך שקיימים $c, C \in \mathbb{R}$ עבורם לכל $x \in X$ מתקיים: $c \leq f(x) \leq C$.

הוכיחו כי אם $g: X \rightarrow [0, \infty)$ אינטגרבילית, אזי קיים $a \in \mathbb{R}$, $c \leq a \leq C$, כך ש: $\int_X f g d\mu = a \int_X g d\mu$.

שאלה 4

יהי $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה חיובית, ותהי f_n סדרת פונקציות ממשיות מדידות- \mathcal{A} . הוכיחו או הפריכו: אם: $f_n \xrightarrow{a.e.} 0$ וגם: $\int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow 0$, אזי קיימת g אינטגרבילית- μ כך ש: $f_n \leq g$ לכל n .

בהנאה!