

תרגיל 7- מרחב וקטורי ותת מרחב וקטורי

שאלה 1

V אינו מרחב וקטורי. נראה שאחד מהתכונות לא מתקיימות:

חוק הקיבוץ לא מתקיים:

$$[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + (z_1, z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2)$$

$$(x_1, x_2) + [(y_1, y_2) + (z_1, z_2)] = (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2)$$

אין שיוויון ולכן V אינו מרחב וקטורי.

שאלה 2

א.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1 - a_2)^2 + a_3^2 = 0 \right\}$$

סכום של שני דברים נותן אפס בתנאי שכל אחד אפס. ולכן נקבל:

$$a_3 = 0 \text{ וגם } (a_1 - a_2)^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 - a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

ולכן, בעצם W זה וקטורים מהצורה:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

נראה ש- W תת מרחב.

• $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$

• סגירות לחיבור: יהיו $\begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$.

$$\begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

$$(a+b - (a+b))^2 + (0)^2 = 0$$

• סגירות לכפף בסקלר: $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, ו- $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

$$(\alpha a - \alpha a)^2 + (0)^2 = 0$$

ב.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 \cdot a_2 = 0 \right\}$$

U אינו תת מרחב. נראה שאין סגירות לחיבור.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \notin U \text{ אבל } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in U$$

ג. יהי $V = \mathbb{R}^n$ המרחב הוקטורי הרגיל מעל \mathbb{R} .

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \right\}$$

נראה ש- W תת מרחב.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in W \quad \bullet$$

$$\bullet \text{ סגירות לחיבור: יהיו } \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in W \text{ אז: } a_1 + \dots + a_n = 0 \text{ וגם } b_1 + \dots + b_n = 0$$

$$\text{משום ש: } \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ \vdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix} \in W$$

$$(a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = 0 + 0 = 0$$

$$\bullet \text{ סגירות לכפף בסקלר: } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in W, \alpha \in \mathbb{R} \text{-ו, } \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} \in W \text{ משום ש:}$$

$$\alpha a_1 + \dots + \alpha a_n = \alpha(a_1 + \dots + a_n) = \alpha \cdot 0 = 0$$

שאלה 3

א. כדי למצוא בסיס, נמצא איזה וקטורים לא תזימים לינארית ולכן נכניס אותם בתור שורות למטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & -5 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 10 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 5R_2}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן 2 הוקטורים העליונים בת"ל. ולכן הם מהווים את הבסיס ל- W . כלומר: $\{(1 \ -7 \ -5 \ 1), (0 \ 2 \ 1 \ 1)\}$ הבסיס ל- W .

ב. כמו בסעיף הקודם, נכניס למטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 6R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים שבת"ל הם: $\{(1 \ 2 \ 3), (0 \ -1 \ -1), (0 \ 0 \ -1)\}$ ולכן הם מהווים את הבסיס ל-U.

שאלה 4

א. נמצא בסיס למרחב השורות ע"י כך שנדרג את המטריצה והבסיס יהיה השורות שלא מתאפסות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הבסיס למרחב השורות הוא: $\{(1 \ 1 \ 1 \ 1), (0 \ 2 \ 1 \ 3)\}$

ב. נמצא בסיס למרחב העמודות ע"י כך שנדרג את המטריצה והבסיס יהיה העמודות עם האיברים המובילים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לעמודה הראשונה והשנייה של המטריצה יש איברים מובילים ולכן הבסיס של מרחב העמודות הוא: $\{(1 \ 1 \ 2), (1 \ 3 \ 0)\}$