אביב תשע"ד

פיסיקה למתמטיקאים

מבוא לתורת הקוונטים: הסתברות

1. הראו כי ניתן לקרב את התפלגות ברנולי $B(n,p)$ (ההסתברות לקבל k "הצלחות" ב n נסיונות) ע"י התפלגות פואסון $Poisson(\lambda)$ כאשר $np \to \lambda$.

נציב $p = \lambda/n$ ונרשום

$$B(n,p) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

כעת בגבול $n \to \infty$ נקבל

$$\lim_{n\to\infty} B(n,p) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)! n^k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

כאשר

$$\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^k \le \frac{n!}{(n-k)! n^k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)...n}{n^k} \le \frac{n^k}{n^k} = 1,$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!n^k} = 1$.

2. נתונה פונקצית צפיפות ההסתברות הבאה

$$f_X(x) = \begin{cases} A \cos^2 \frac{\pi x}{2a} & |x| \le a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

(א) מצאו את קבוע הנרמול A

מתנאי הנרמול $A \int_{-a}^{a} \cos^2 \frac{\pi x}{2a} dx = 1$ נקבל $A = 1/a$.

(ב) מצאו את EX ואת ΔX

$EX = a^{-1} \int_{-a}^{a} x \cos^2 \frac{\pi x}{2a} dx = 0$

$EX^2 = a^{-1} \int_{-a}^{a} x^2 \cos^2 \frac{\pi x}{2a} dx = a^2 (\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2})$

ולכן $\Delta X = \sqrt{EX^2} = a\sqrt{(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2})}$.

(ג) מה הסיכוי לקבל ערך $0 \le x \le \infty$?

מאחר שפונקצית צפיפות ההסתברות זוגית נקבל $P\{X = x \in [0, \infty)\} = 1/2$.